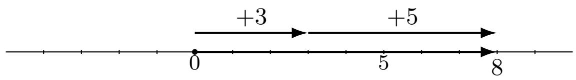
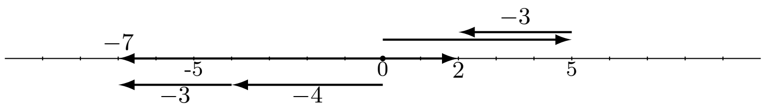
正・負の数の加法と減法

数を数直線上のベクトルとしてとらえることは、加法の見通しをよくする。たとえば、$3+5=8$ であることは、ベクトル $+3$ にベクトル $+5$ を継ぎ足した結果と見ればよい。



このような見方をすれば、正の数と負の数を混ぜた足し算も分かりやすい。



図で、数直線の上側に示したベクトル—実際は数直線上にあると思ってほしい—は $(+5)+(-3)$ を表し、その結果である $+2$ が数直線上に示されている。また、下側に示したベクトルは $(-4)+(-3)$ を表し、その結果である -7 が数直線上に示されている。このようなことから $(+2)+(-6)$ を計算すれば -4 になることは容易に確かめられるだろう。

さて、数学には暗黙の了解が随所に見られる。いま、足し算をベクトルの継ぎ足しと見たので、数式も $(+5)+(-3)=+2$ のように、ベクトルと足し算を区別するための ( ) を用いて記述してきた。もし、( ) と足し算記号の $+$ を省略して、符号つきの数を並べただけであっても、それが足し算であるという了解—これが暗黙の了解である—があれば、( ) と足し算記号の $+$ は不要になる。そのもとで先の 3 つの計算例を書き直すと、

$$
\begin{aligned}
(+5)+(-3)&=+2 &\quad\Rightarrow\quad& +5-3=+2\\
(-4)+(-3)&=-7 &\quad\Rightarrow\quad& -4-3=-7\\
(+2)+(-6)&=-4 &\quad\Rightarrow\quad& +2-6=-4
\end{aligned}
$$

となるだろう。

とくに、正の数は $+$ がなくても区別できるので、1 番目と 3 番目は、それぞれ $5-3=2$ や $2-6=-4$ という引き算と見なしてよい。つまり、私たちが行ってきた引き算は、負の数を含んだ足し算が形を変えて目の前に現れていたものであった。

ただし、このような書き方にしてしまうと、符号つきの数に ( ) があって、それらの間に足し算記号 $+$ があることをよほど意識しないと、足し算と引き算がごちゃ混ぜになって、ベクトルを継ぎ足していることが薄れてしまいかねない。そのためにも、数が符号つきであることを強く意識しておく必要がある。そのような意識で見る数を**項**を呼ぶことにする。すなわち、$5-3$ であれば $+5$

と -3 の項が $(+5)+(-3)$ のように継ぎ足されていると意識し、$-4-3$ であれば -4 と -3 の項が $(-4)+(-3)$ のように継ぎ足されていると意識するのである。

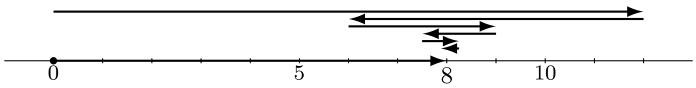
そう思って、たとえば

$$12-6+3-1.5+0.75-0.375+\cdots$$

のように足し算と引き算が交互に、しかも無限に続く計算を目にしても、

$$(+12)+(-6)+(+3)+(-1.5)+(+0.75)+(-0.375)+\cdots$$

というように項の足し算に見直すことができ、次々とベクトルを継ぎ足して行く様子を感じることができるだろう。



この、交互に継ぎ足されるベクトルは、最終的に数直線上の 8 に収束して行くのだが、そのことは式を見ているだけでは想像もできないのではないだろうか。

このことを本当に実感したければ、表計算ソフトウェア Microsoft Excel を利用するのも手である。

◇	A	B	C	D	E	F
1	B 列の合計は↓	12				
2	(* B1)	(* B2)				
3		↓下へコピーする				
4		↓				
5		↓				
6		↓				

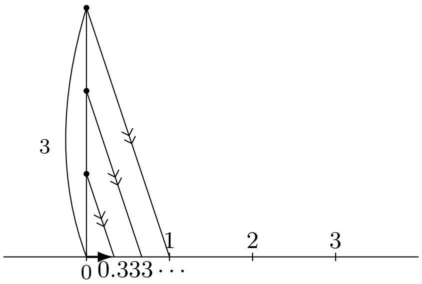
※ セルの式
(B1)　=SUM(B1:B50)
(B2)　=B1/-2

最初の値である 12 とそれぞれの計算式を、たとえば図のように入力すると、B 列の合計が A2 セルに表示される。B2 セルをコピー&ペーストするたびに、A2 に表示される合計値が 8 に近づくのが分かるだろう。このとき B 列に表示される数が項であり、記号 $+$ を使わないまま和を求めていることに注意してもらいたい。

このような例が出たので、一部の数について、たとえば $0.333\cdots$ がどのようにして数直線上の一点で示せるかを説明しておこう。そのために

$$\frac{1}{3}=0.333\cdots$$

であることを利用する。ほとんどすべての人は、この等式を自然なものとして受け入れているはずである。しかし実際は、それほど自然なことではないのである。いまは多少直観に頼ることになるだろうが、図のようにすれば正確な $0.333\cdots$ の位置を特定できるのである。



作図は次のようにする。まず準備として、数直線の 0 の位置に長さ 3 の線分を立てる。長さ 3 の線分なので、1 ずつの目印（図では ●）をつけることができる。次に、数直線上に立てた線分の先端と数直線の 1 を結んだのち、これに平行な線を目印から数直線に向けて引けば、数直線の目盛 1 の幅を 3 等分できたことになる。0 に近い方の交点が $\dfrac{1}{3}$ であるから、そこが $0.333\cdots$ である。

このような作図で数直線上に一点を特定できる数は、分数 $\dfrac{M}{N}$ で表すことができる数に限られる。しかし円周率である $3.141592\cdots$ のような数は、分数で表せないことが知られているので、このような作図ができない。分数で表せない数でも数直線上の一点を特定できることを示すには、ずっと先の極限の考えを身につける必要がある。

*　*　*

作図によって数直線上の一点を特定できる理由は、私たちが次の概念を正しいと認めているからである。

線と線が交わるところは一点である

幅を持たない線があること、大きさを持たない点があること、そして無限に続くものがあること、これらの概念を認めて初めて数学が成立するのである。いまは $\dfrac{1}{3}=0.333\cdots$ であることを利用したのだが、1 の 3 等分点が $0.333\cdots$ であるなら、3 等分点である $0.333\cdots$ の 3 倍は 1 であるはずである。ところが

$$(0.333\cdots)\times 3=0.999\cdots$$

であって 1 ではないから、何かがおかしいと感ずる人がいるようである。

しかし実際は、$0.999\cdots=1$ であることは間違いない事実であって何らおかしいことはないのである。そのことを示すには、やはりずっと先の極限の考えを身につけなくてはならないのである。▮

正・負の数の乗法と除法

乗法には 2 通りの考えがある。ひとつは加算の置き換えという考え、もうひとつは概念の創出である。概念の創出が何を指すかは、追って説明することにしよう。

加算の置き換えとは、$2+2+2+2+2=2\times5$（2 を 5 回加える）—国によっては $2+2+2+2+2=5\times2$（5 回 2 を加える）と見るようである—のように同じ数を繰り返し加算する場合、加算回数を乗数

として表すことである。$2+2+2+2+2=10$ なので $2\times 5=10$ となる。このことは負の数にも適用でき、$(-2)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)=(-2)\times 5$ と表せば $(-2)\times 5=-10$ となる。これは、$(-2)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)$ は矢線 $\xleftarrow{(-2)}$ を 5 つ継ぎ足すことにあたるので、数直線上でも明らかなことであろう。

しかし、いまの例の逆 $5\times(-2)$ は加算の置き換えと考えることはできない。5 を (-2) 回加算するという意味をどうとってよいか分からないからである。こんなとき数学は、整合性を基準にするのである。正の数の乗法においては、$a\times b=b\times a$ という**交換法則**が成立している。交換法則の整合性をとれば $5\times(-2)=-10$ とすべきだろう。さらに、別の面からも $5\times(-2)=-10$ としてよい根拠を示すことができる。乗法は、乗数を 1 ずつ減らすと積は被乗数ずつ減る性質をもっていることに注目してみる。すると

$$
\begin{array}{lrcrl}
 & 5\times 2 & = & 10 & \\
\text{（乗数を 1 減）} & 5\times 1 & = & 5 & \text{（積が 5 減）} \\
\text{（乗数を 1 減）} & 5\times 0 & = & 0 & \text{（積が 5 減）} \\
\text{（乗数を 1 減）} & 5\times(-1) & = & -5 & \text{（積が 5 減）} \\
\text{（乗数を 1 減）} & 5\times(-2) & = & -10 & \text{（積が 5 減）}
\end{array}
$$

の例から、$5\times(-2)=-10$ は妥当な解釈といってよい。

乗法のもうひとつの考えである概念の創出とは、たとえば (速さ) $\times$ (時間) $=$ (距離) のように、性質が違うものを掛けて新しいものを創出することを指す。5(m/秒) $\times$ 2(秒) $=$ 10(m) は決して 5(m/秒) $+$ 5(m/秒) $=$ 10(m/秒) ではない。秒速は数えるものではないからだ。一般に、速さ・時間・距離には正の数を用いている。しかし、

負の速さは　逆向きの速度
負の時間は　過去への溯上
負の距離は　逆方向への測定

のように新たな定義を与えるならば、$5\times(-2)=-10$ は、秒速 5m の速さで前進すれば 2 秒前の位置は 10m 手前である、となって理にかなう。すると、$(-5)\times(-2)=10$ は、秒速 -5m の速さで前進する、すなわち秒速 5m の速さで後退すれば 2 秒前の位置は 10m 先だった、となってやはり理屈に合う。

数学では、つじつまが合えば現実離れした事柄でも正しいと考えてよい。ここでの例は、つじつまも合っているし現実的にも不備がないので、一般的に (負) $\times$ (負) $=$ (正) とすることに何の問題もないだろう。さらに、

$$
\begin{array}{lrcrl}
 & (-5)\times 2 & = & -10 & \\
\text{（乗数を 1 減）} & (-5)\times 1 & = & -5 & \text{（積が 5 増）} \\
\text{（乗数を 1 減）} & (-5)\times 0 & = & 0 & \text{（積が 5 増）} \\
\text{（乗数を 1 減）} & (-5)\times(-1) & = & 5 & \text{（積が 5 増）} \\
\text{（乗数を 1 減）} & (-5)\times(-2) & = & 10 & \text{（積が 5 増）}
\end{array}
$$

であることを見れば、つじつま合わせの面だけでなく整合性の面でも正しいことが確認できるはずだ。

$$\boxed{(\text{正})\times(\text{負})=(\text{負})、\quad (\text{負})\times(\text{正})=(\text{負})、\quad (\text{負})\times(\text{負})=(\text{正})}$$

除法については、ひとつのことだけを確認しよう。割り算というのは掛け算の逆をすることであった。正の数どうしで $5\times 2=10$ であれば、ここから $10\div 2=5$ や $10\div 5=2$ を考えることができた。このことから、$(-5)\times(-2)=10$ より $10\div(-2)=-5$ を、$(-5)\times 2=-10$ より $(-10)\div 2=-5$ や $(-10)\div(-5)=2$ を導くことができる。このことは一般に、(正) と (負) の積が (負)、(負) と (負) の積が (正) であるように、(正) と (負) の商が (負)、(負) と (負) の商が (正) であることを意味している。

このことから積と商に関して

$$\boxed{\text{同符号の積・商は (正)、異符号の積・商は (負)}}$$

ということもある。

演算の優先順位

正の数と負の数に対して、足す・引く・掛ける・割るが自在にできるようになった。それは喜ばしいのだが、注意を要することがひとつだけある。それは、掛け算は足し算より優先するということだ。なぜ、掛け算が優先されるかは言及しないが、そのことを踏まえた上で、項を意識して計算することで正しい計算ができる。まず、例を見ることにしよう。

$$
\begin{array}{llcl}
[\text{a:}] & -8-(-4)\times(-3) & = & -8-(+12) \\
 & & = & -8-12=-20\ . \\
[\text{b:}] & -8-(-4)\times(-3) & = & -8+4\times(-3) \\
 & & = & -8-12=-20\ .
\end{array}
$$

[a:] と [:b] はもとは同じ式だが、計算の手順に多少の違いがあることが分かるだろう。[a:] は掛け算優先のルールに従い、まず $(-4) \times (-3) = +12$ を先に求めた。$+12$ は単なる 12 なので式を $-8-12$ に書き換えて、項の意識をもって -8 と -12 の和を求めている。それに対して [b:] は $-(-4)$ を $+4$ としたあとで、掛け算優先のルールに従って $+4 \times (-3) = -12$ を求めた。それ以降は [a:] と同じである。

ここで [b:] において、掛け算より先に $-(-4)$ を $+4$ にしてよいのかという疑問を持ったかもしれない。しかし、それは問題ないのである。$-(-4)$ を $+4$ にすることは、実はれっきとした掛け算だからだ。つまり $-(-4)$ というのは $(-1) \times (-4)$ のことを意味する。もう少しよけいなおせっかいを書くと

$$-8-(-4) \times (-3) = -8 + (-1) \times (-4) \times (-3)$$

のことである。そのため掛け算における結合法則—これは後述する—によって、$(-1) \times (-4)$ を先に計算するか、$(-4) \times (-3)$ を先に計算するかの違いで [a:] と [b:] の手順の違いができたにすぎないのだ。結局 $+(-4)$、$-(+4)$、$-(-4)$ のように符号が重なっている部分を -4、-4、$+4$ の項に書き換えることは、$+1$ や -1 を掛けることになっているのである。