# 数について

はじめに、小学校から慣れ親しんできた数について確認をしておこう。まず、$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ と延々続く**自然数**、それに $0$ である。場合によっては $0$ を含めて自然数とすることもあるが、ここでは $0$ は自然数に含めないという立場をとることにする。$0.5,\ 1.666\cdots,\ 3.141592\cdots,\ \ldots$ などは小数である。$0.5$ のように割り切れている小数は**有限小数**、$1.666\cdots$ のように、あるところから繰り返しが現れる小数は**循環小数**という。**円周率**と呼ばれる $3.141592\cdots$ のような**循環しない小数**も目にしたことがあるはずである。

小数の他に分数があることも知っているだろう。$0.5$ は $\dfrac{1}{2}$、$1.666\cdots$ は $\dfrac{5}{3}$ と表すことができる。$\dfrac{5}{3}$ は $1\dfrac{2}{3}$ のような帯分数に直せるが、数学は会計処理と違って帯分数のほうが見やすいわけではないので、ほとんどの場合、仮分数のまま扱っている。また、円周率である $3.141592\cdots$ は一般に分数で表すことができないので、おそらく**近似値（きんじち）**である $3.14$ を使ってきたことだろう。しかし、とくに制約がないときは、小数より分数を用いるのが数学の習慣である。

計算は、足す・引く・掛ける・割るの四則が基本であった。足すことは**加法**、引くことは**減法**といい

$$3+7, \quad 55.5-1.23, \quad \frac{2}{3}+\frac{1}{5}, \quad 2-\frac{5}{8}$$

など、様々な計算をしたはずである。小数どうしの計算では小数点をそろえて筆算をし、分数どうしの計算では分母を通分してまとめるなど、計算方法が身に付いているだろう。

$$\begin{array}{rr} & 55.5 \\ -) & 1.23 \\ \hline & 54.27 \end{array} \qquad\qquad \frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{10}{15}+\frac{3}{15}=\frac{13}{15}$$

掛けることは**乗法**、割ることは**除法**といい、先の数値に対して

$$3\times 7, \quad 55.5\div 1.23, \quad \frac{2}{3}\times\frac{1}{5}, \quad 2\div\frac{5}{8}$$

のような計算ができる。小数の乗法・除法には小数点の付け方の規則があった。分数の乗法は分子・分母を互いに掛けてよいが、除法では割る数を**逆数**にして掛ける規則があった。

$$\begin{array}{r@{\,}l} & \underline{\quad 45.1\cdots} \\ 123\ ) & \ 5550. \end{array} \qquad\qquad 2\div\frac{5}{8}=\frac{2}{1}\times\frac{8}{5}=\frac{16}{5}$$

分数の除法ではなぜ逆数の乗法に直して計算をするのか、ということについてここで述べることはしない。習ったときに理由を聞いていると思われるが、文字式の計算に際して改めて説明する機会があるので、それまでは習慣に則って計算をしてもらうことにしよう。

**負の数**はマイナスの**符号** “−” がついた数である。日常でもごく自然に使われているので、それほど違和感を持っていないであろう。これまでに見てきた数—**正の数**という—に、− がついた

$$-1, \quad -2, \quad -3, \quad -0.5, \quad -\frac{5}{3}, \quad -3.141592\cdots$$

などはすべて負の数である。ただし、0 は正の数でも負の数でもないとし、符号もつけない。ときどき、±0 という表現を見かけるかもしれないが、この場合の “±” は正負を表す符号ではなく、増減を表す記号として用いられている。また正の数は、そのことを強調するためにプラスの符号 “+” をつけることもある。

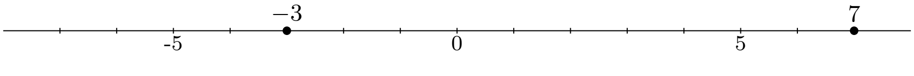
* * *

±0 という記述が使われる例を示しておこう。たとえば何かの製品の規格が $75 \pm 0.5$mm となっていれば、それは 74.5mm から 75.5mm の規格ということである。ここで、具体的に 0.5mm という数値を与えずに $75 \pm d$mm としておいて、その製品が使用される場所によって $d = 0.5$ であるとか、$d = 0.1$ であるとかすることがあるかもしれない。このとき、誤差をまったく許さない $d = 0$ を考えた場合、$75 \pm 0$ となる。つまり、±0 は “誤差数値” のひとつの例を示しているのである。▌

## 数直線

負の数があれば計算の幅が広がる。もし、正の数しか使えなければ $7 - 10$ は計算できない。しかし日常において、たとえば口座に 7 万円の貯金があるときに 10 万円の品物をクレジットカードで買うことはできる。この行為は $7 - 10$（万円）に相当し、その時点で 3 万円の負債を抱えたことを意味する。3 万円の負債を $-3$ 万円で表現するなら $7 - 10 = -3$（万円）という計算が成り立つ。

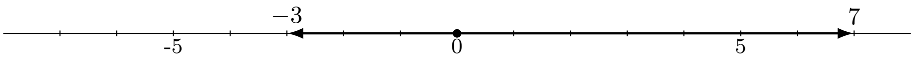
しかし数学においては、いつも買い物の例を出すわけにはいかないし、ときには $0.333\cdots$ のような数を扱う必要が生じる。このようなことを考えると、あまりに具体的な数値だけで計算を進めるのは適当でないように感じる。そこで、あらゆる数が扱えて、視覚的にも分かりやすい**数直線**を考えることにする。数直線とは、0 を基準に据えた一本の直線であり、一般に右方向が正、左方向が負と決められている。ただ、それだけでは目安になるものがないので、ふつうは $\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$ のように**整数**の目盛をつけているのである。




さて、図はそれぞれ 7 と −3 を示したものだが、数直線上に点で示すと、7 は 5 の少し右にあるとか、−3 は 0 から 3 だけ離れているというように、どちらかといえばその位置や量に関心が向いてしまう。−3 万円が 3 万円の負債であるのと同じく、3 という量に視線が注がれるのである。こ

の考えが良くないというのではなく、数を量でとらえたものは**スカラー**と呼ばれ、数の一面を示すものとなっている。

これから負の数を交えた計算をしようとしているときに、量だけに視線を注いだのでは $3$ と $-3$ を明確に区別できない。そこで、量だけでなく数が持つもうひとつの性質、数の向きにまで目を向けたい。そのためには、数直線上に数を表すとき、点ではなく矢線を使うことが良いように思える。




数を量だけでなく向きまで含めてとらえたものは**ベクトル**と呼ばれる。実は、ベクトルは数だけに適用される考えではく、むしろベクトルの考えを数に当てはめたと見るほうが妥当であろう。

## 数と数直線

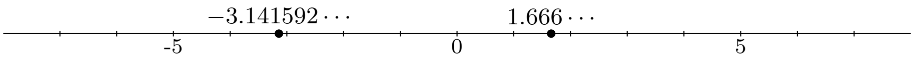
ところで、負の数は日常的に使っているので気に留めていないかもしれないが、負の数は本当に存在しているのだろうか。歴史的にも、負の数が市民権を得るには長い時間を要した。なぜなら、負の量という考えがなかったからである。しかし現代では、$-3$°C といえば温度計に負の量として目盛が実在している。それは、0°C を基準としたベクトル目盛を採用したからである。絶対温度であるスカラー目盛を用いれば $-3$°C は 270K（ケルビン）ほどになる。絶対温度に負の温度はない。また、ものに対しても $-$ を使って数えたりはしない。「ここに $-3$ 個の品物がある」とは言わないだろう。そう考えると負の数は実在するというより、人の頭の中だけにあるように思える。しかし、そのとらえ方は平等ではない。実際、正の数も人の頭の中だけにあるものだからだ。

つまり、数は “概念” なのである。私が手にしている 1 円玉とあなたが手にしている 1 円玉は、ともに 1 の量の価値があることは理解できる。しかし、私の 1 円玉とあなたの 1 円玉はまったく同じものでないことは、硬貨の製造年を調べなくとも分かる。1 円玉が等価という場合は、私たちの概念「$1 = 1$」に 1 円玉の価値を重ね合わせているだけなのである。すると、$1 = 1$ である概念を重ね合わせられない場合もすぐに見つけることができる。たとえば、1 円玉と気温 1°C では、同じ数値 1 を用いているがまったく違った概念である。

$$\boxed{1 = 1 \qquad \text{だが} \qquad 1\,\text{円} \neq 1^\circ\mathrm{C}}$$

算数や数学は、日常の数的な事象を処理するために発展してきたが、いまでは数学的性質を日常の事象に適用していると言ってもよいのである。このことを意識しないで、日常的な感覚だけで数学に取り組むと、思わぬ誤解を生むことになりかねない。

いまここで理解に努める必要はないのだが、数に日常の感覚を当てはめるとおかしなことになる例を示しておこう。数直線上に目盛をつけて整数を示すことについては、何ら疑いをはさむことはないであろうが、$1.666\cdots$ や $-3.141592\cdots$ のような無限小数は、数値に終わりがないのだから、数直線上の一点を示すことなどできないのではないかと考えるかもしれない。しかし、教科書などには平然と $1.666\cdots$ や $-3.141592\cdots$ の位置が示されている。終わりがない数値が一点に定まるのだろうか。




実は、そこに誤解がある。この段階で無限小数を完全に理解することは難しいので、技術的な話を抜きにして誤解のもとになっている部分を指摘しておこう。誤解は、おそらく数直線が目に見える形で描かれているために生じるのだろう。目に見えるものは現実のものとしてとらえやすいが、実際には人間の頭の中にしか存在しないことが多くある。漫画や空想の事物などは数多く目にするだろうが、それらは決して現実の世界にはない。数直線もそのひとつである。したがって、数直線は目に見えたとしても完璧に思考の産物なのである。数直線が思考の産物であるがゆえに、思考の産物である整数や無限小数を一点で示すことができるのである。ただ、そのことをどのような論理的思考で示すかについては、一部の数についてはすぐ後で説明するが、あらゆる数についての説明はずっと後のことになる。