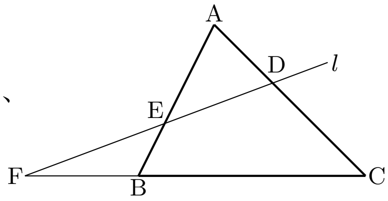
メネラウスの定理

三角形の辺の比に関する定理に、**メネラウスの定理**がある[1]。定理は以下のように調和がとれていて興味深い。

メネラウスの定理

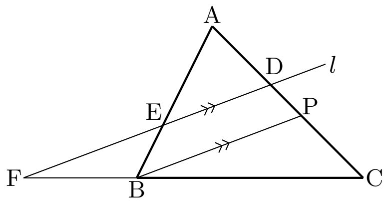
三角形に交わる直線 l と各辺の交点に、

$\dfrac{AD}{DC}\cdot\dfrac{CF}{FB}\cdot\dfrac{BE}{EA}=1$ が成り立つ



調和とは、三角形の頂点を順に読むとき、l と辺（または辺の延長）との交点を間に挟みながら線分の比にして掛けると、1 になることを指す。これは、どの頂点から読み始めても、また右回り左回りどちらでも必ず成り立つ。定理で提示した式は、A から右回りに ADCFBEA の順に読んだ、ひとつの例だと思ってもらいたい。

【証明】



はじめに、B を通り l に平行な線分を引き、AC との交点を P とする。

ここで △ABP に注目しよう。三角形の内部に引かれた平行線の定理より、$AE:EB=AD:DP$ がいえる。

比を分数で表す際に、線分の読み方を証明したい式と同じ順に読み換えておくと $\dfrac{BE}{EA}=\dfrac{DP}{AD}$ である。ゆえに $DP=AD\cdot\dfrac{BE}{EA}$ （※）が成り立つ。

次に、△CDF に注目しよう。三角形の内部に引かれた平行線の定理より、$CD:DP=CF:FB$ がいえる。

比を分数で表すと $\dfrac{DC}{DP}=\dfrac{CF}{FB}$ であるが、両辺に $\dfrac{DP}{DC}$ を掛けると、$\dfrac{CF}{FB}\cdot\dfrac{DP}{DC}=1$ が得られる。

この式の DP に※を代入すると $\dfrac{CF}{FB}\cdot\dfrac{AD}{DC}\cdot\dfrac{BE}{EA}=1$ となって、これが証明したい式である。 ■

[1] アレクサンドリアのメネラウス（70?–130?）：エジプトの数学者か。

メネラウスの定理の逆

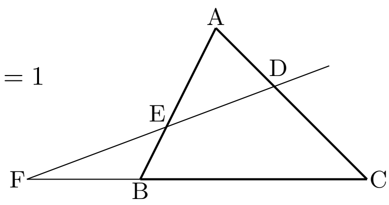
メネラウスの定理の逆を考える。それは

メネラウスの定理の逆

三角形の辺上の点に $\dfrac{AD}{DC}\cdot\dfrac{CF}{FB}\cdot\dfrac{BE}{EA}=1$

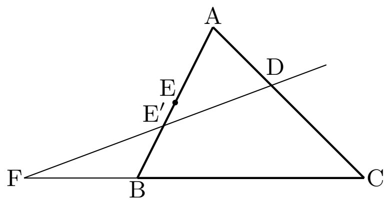
が成り立てば、3 点 D、E、F は

一直線上の点である



ということになろう。

【証明】



いま、$\dfrac{AD}{DC}\cdot\dfrac{CF}{FB}\cdot\dfrac{BE}{EA}=1$（※）が成り立っているのに、3 点 D、E、F が一直線上にないとする。

すると、D、F を通る直線は引けるのに E はこの直線上にないことになるので、

DF を通る直線は辺 AB と E でない点 E′ で交わるはずである。

D、E′、F は一直線上の点であるからメネラウスの定理により、$\dfrac{AD}{DC}\cdot\dfrac{CF}{FB}\cdot\dfrac{BE'}{E'A}=1$

（★）が成り立つ。

すなわち、※と★が同時に成り立つことになるので、$\dfrac{BE}{EA}=\dfrac{BE'}{E'A}$ がいえる。

これは、E と E′ は線分 AB を同じ比に分ける内分点であることを意味するから、

E と E′ は同じ点である。

よって、3 点 D、E、F は一直線上にあることが分かった。 ■

＊　＊　＊

メネラウスの定理は辺の比にきれいな関係があることを教えるものだが、この発想はどのようにして生まれたのだろうか。たとえば、角の 2 等分と辺の比の定理では、実際に色々な三角形を描き、辺の長さを測ることで何となく法則に気づいたかも知れない。しかしメネラウスの定理は、三角形を 1 本の線で分け、さらに線が辺の延長と交わる点を使い、なおかつそれらの比の積が 1 になる、という複雑な定理である。定理の結果はたしかに美しいのだが、それに気づく過程は決して美しいものではなかったであろう。▌

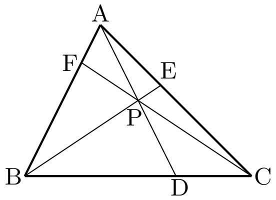
チェバの定理

メネラウスの定理に似た関係が**チェバの定理**である[2]。チェバの定理は、三角形を 1 本の直線で切るのではなく、三角形の内部の 1 点に関するものである。

チェバの定理

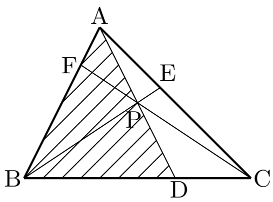
三角形内部の点に関わる線分の比について、

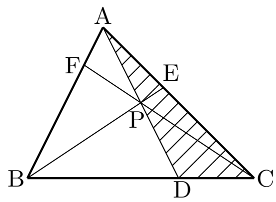
$\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$ が成り立つ



メネラウスの定理と同じく、どの頂点から読み始めても、また右回り左回りどちらでも必ず成り立つ。定理で提示した式は、A から左回りに AFBDCEA の順に読んでいる。証明は補助線を引かずに、メネラウスの定理を適用するのが簡単である。

【証明】





まず、△ABD にメネラウスの定理を適用すると、$\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BC}{CD}\cdot\dfrac{DP}{PA}=1$（※）が成り立っている。

次に、△ACD にもメネラウスの定理を適用して、$\dfrac{AE}{EC}\cdot\dfrac{CB}{BD}\cdot\dfrac{DP}{PA}=1$ であるから、$\dfrac{DP}{PA}=\dfrac{EC}{AE}\cdot\dfrac{BD}{CB}$ である。

これを※に代入すると $\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BC}{CD}\cdot\dfrac{EC}{AE}\cdot\dfrac{BD}{CB}=1$ が得られるが、BC を約分すると、それが証明したい式である。 ■

*　*　*

いまチェバの定理を、メネラウスの定理を用いて証明したところであるが、メネラウスの時代とチェバの時代があまりに離れているのはなぜだろうか。三角形の外心や内心は、辺や角の二等分線を引いた結果生じる点であるのに対し、チェバの定理における内部の点は、あらかじめ指定されている。言わば、外心や内心の逆を考えているようなものである。そのような考えならすぐにも思いつきそうなものだが、歴史はそうでないと言っている。実際は、チェバの定理はメネラウス以前から知られていた定理の再発見だったのかも知れない。その場合、チェバの定理の証明はメネラウスの定理を使わずに示されたはずである。私には、似た

[2] ジョバンニ・チェバ（1647–1734）：イタリアの数学者。

ような定理であるものの、作図の仕方はチェバの定理の方がはるかに素直に思えてならない。本当のところは知る由もないが、たまには数学史に思いを馳せるのも悪くない。▮

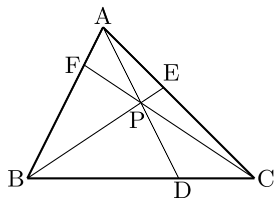
チェバの定理の逆

チェバの定理の逆

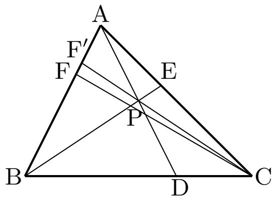
三角形の辺上の点に $\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$

が成り立てば、AD、BE、CF は、

1 点で交わる



【証明】



いま、$\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$（※）が成り立っているのに、CF が AD と AE の交点 P を通らないとする。

このとき、CP の延長が AB と交わる点を F′ とする。

AD、BE、CF′ は P で交わるので、チェバの定理により、$\dfrac{AF'}{F'B}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$

（★）が成り立つ。

すなわち、※と★が同時に成り立つことになるので、$\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{AF'}{F'B}$ がいえる。

これは、F と F′ は線分 AB を同じ比に分ける内分点であることを意味するから、

F と F′ は同じ点である。

よって、CF も点 P を通ることが分かった。 ■