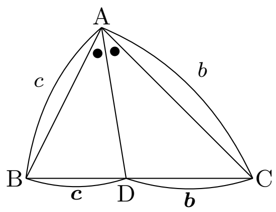
三角形に関する定理

辺の比ということでは、三角形の 1 つの角を 2 等分したときにも見事な定理がある。それが

定理（角の 2 等分と辺の比）

三角形の 1 つの角の二等分線は、

その角の対辺を、角を挟む辺の比に分ける

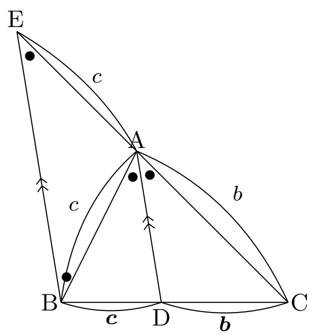


である。言葉にすると意味をとりづらいが、図を見れば何のことかすぐに分かるだろう。注意してほしいのは、辺の長さに使った b、c であるが、これは比の値にしたときに等しいと読んでもらいたい—そのためにフォントを少し変えている。つまり、

$$b : c = \boldsymbol{b} : \boldsymbol{c} \quad \text{すなわち} \quad CA : AB = CD : DB$$

ということである。この定理を証明してみよう。

【証明】



はじめに、B を通り AD に平行な線分を引き、AC の延長との交点を E とする。

すると $AD // EB$ の同位角は等しいので $\angle E = \bullet$（∠A の右）である。

また $AD // EB$ の錯角は等しいので $\angle ABE = \bullet$（∠A の左）である。

このことから、△AEB は二等辺三角形といえるので、$AE = c$ である（ここでは、c は比の値でなく、$AE = AB$ なる実測値であることに注意しよう）。

さて、ここで △CEB を、頭を右に傾けて見る。

△CEB 内に引いた平行線 AD により、辺 CE と辺 CB は同じ比に分けられている、

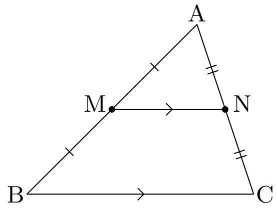
すなわち $CA : AE = CD : DB$ であることが分かる。

AE は AB に読み替えてよいので、これで定理が示された。 ■

実はこの定理は、三角形の内角の 2 等分に限らず、外角の 2 等分であっても成立するのであるが、それを証明する前に、述べなくてはならないことがある。

中点連結定理とその周辺

中点連結定理と呼ばれる定理がある。



三角形 ABC の任意の 2 辺の中点 M、N を結ぶと、

$$\boxed{MN /\!/ BC、\quad MN = \frac{1}{2}BC}$$

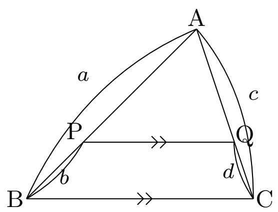
が成り立つ、というものである。とくに証明という形をとらずに説明すれば、図において △AMN と △ABC は、辺の比が 1 : 2 である 2 辺と共通する間の角 A を持つので、$\triangle AMN \sim \triangle ABC$ である。このことから $MN = \frac{1}{2}BC$ が分かる。また、相似な図形の対応する角は等しいので、同位角が等しいことが分かり、その結果 $MN /\!/ BC$ が得られる。これらのことは、三角形の重心が 1 点で交わることを証明する際に使ったことを思い出してもらいたい。

ここでは、中点連結定理を一般化した、次の性質を証明しよう。

△ABC 内に BC に平行な線分 PQ を引くと、

$$\boxed{AB : BP = AC : CQ}$$

が成り立つ



これがもし $AB : AP = AC : AQ$（※）ということであれば、単に相似な三角形の対応する辺の関係であるから、取り立てて証明することではない。しかし、※が成り立っているならば、図に示した辺の長さを用いて

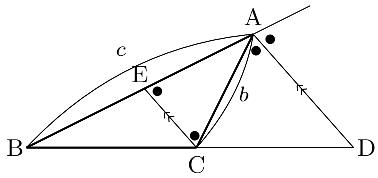
$$a : (a-b) = c : (c-d)$$

が成り立っていることを意味する。すると、これを分数で表して $\dfrac{a-b}{a} = \dfrac{c-d}{c}$ であるが、

$$\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{b}{a} = 1 - \frac{d}{c} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{b}{a} = -\frac{d}{c} \quad \Leftrightarrow \quad a : b = c : d$$

のような同値変形で、証明したいことが示される。以上のことをふまえて、角の 2 等分と辺の比に関する定理において、外角を 2 等分する場合の証明を与えよう。

【証明】



ここで示したいことは $CA : AB = CD : DB$ であるが、図の位置がさっきの逆であるから、$BA : AC = BD : DC$ を示す。

はじめに、C を通り AD に平行な線分を引き、AB との交点を E とする。

すると $AD//EC$ の同位角は等しいので $\angle AEC = \bullet$（∠A の右）である。

また $AD//EC$ の錯角は等しいので $\angle ACE = \bullet$（∠A の左）である。

このことから、△AEC は二等辺三角形といえるので、$AE = AC$ である。

さて、△ABD と内部に引かれた平行線を見ると、平行線に挟まれた線分の比が $BA : AE = BD : DC$ になっている。

AE は AC に読み替えてよいので、これで定理が示された。 ■

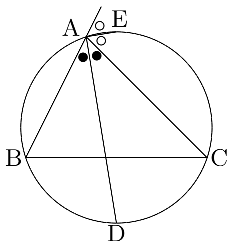
角の 2 等分と外接円の弧の比

角の 2 等分と辺の比に関する定理は、外接円の弧の比まで拡張される。

定理

三角形の 1 つの角の二等分線は、外接円の弧を等しく分ける

$(\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$ および $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE})$

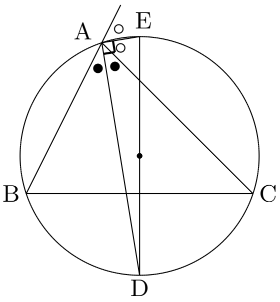


定理としては、弧を等分することを言及しただけであるが、実際は次のことも成り立っている。

内角、外角の二等分線と円周の交点を D、E とすると、DE は外接円の直径である

これは、定理にするほどの価値はないのでこのままにするが、証明の中でこの事実を指摘する。では、証明に入ろう。

【証明】



はじめに、$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$ を示す。

仮定より $\angle BAD = \angle CAD$ であるから、これらの円周角に対する中心角は、それぞれ 2 倍の大きさであり等しい。中心角が等しければ、それに対する弧の長さも等しいので、$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$ である。

次に、$\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE}$ を示す。

∠A は内角と外角をともに 2 等分したので、図において∠DAE は 90° であることが分かる。これは $\overset{\frown}{\mathrm{DCE}}$ に対する円周角にあたるので、DE は外接円の直径である。すなわち $\overset{\frown}{DBE} = \overset{\frown}{DCE}$ となる。

ここで、$\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{DBE} - \overset{\frown}{BD}$、$\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{DCE} - \overset{\frown}{CD}$ であるが、$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$ であったので、$\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE}$ を得る。 ■

---

*　*　*

図形の証明には直接関係しないことであるが、証明の文などを記述するとき、記法に迷うことがある。実はいまの定理においても、“2 等分” と書いたり “二等分線” と書いたりして、一貫性に欠けると思われるかもしれない。要するに、算用数字を使うべきか漢数字を使うべきかという問題である。基本的には、数学的に n に置き換えることができれば算用数字を使い、言葉や用語には漢数字を使えばよいのだろう。その観点に照らせば、2 等分は 3 等分、4 等分、. . .、n 等分、. . . の流れに従って算用数字でよいだろう。すると二等分線については、n 等分線という言い方があるだろうから、算用数字で書けばよさそうである。しかし、n 等分に比べると n 等分線という表現はあまりなく、ほぼ二等分線という表現が定着しているように思えるので、これは漢数字で書いてみた。

では、三角形、四角形、五角形、. . . とくれば、多角形は漢数字が適当かと思えるものの、はたして “二百五十七角形” と書くのが妥当かどうかは意見が分かれるかもしれない。私ならこれは “257 角形” と書くだろう。この手のものでは他に、一つ、二つ、三つ、. . . を挙げることができる。この場合は、十（とう）までを数え言葉と考えれば漢数字でよいのだろう。ただ、その先は 11 つではなく 11 個とならざるを得ないので、私ははじめから 1 つ、2 つ、3 つ、. . . と書くことにしている。ほとんど主観の域を出ないことだろうが、なかなか難しい問題である。▌