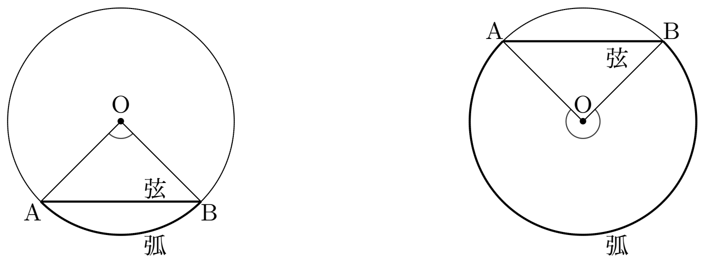
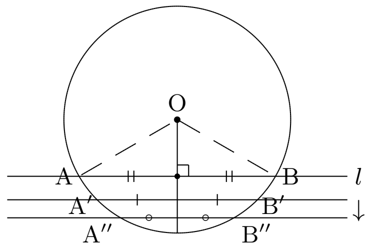
円の半径と弦

ここで円に関するいくつかの性質を取り上げることにする。円周上の 2 点 A, B を円周に沿って切り取ったものが弧であるが、円周上の 2 点 A, B を直線で結ぶと、それは**弦** AB という。



弧の長さは中心角の大きさに比例している。中心角が 2 倍になれば弧の長さも 2 倍になることは、角度が円周にそって測られることから分かるであろう。しかし弦の長さは中心角の大きさにまったく比例しない。それは、中心角を大きくすれば明らかになる。弧は中心角に比例して長くなるが、弦はむしろ短くなることがあるからだ。



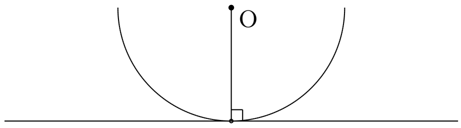
ここで円を横切る直線 l を考えよう。そして、半径を l の中点を通るように引くと、弦 AB と半径は垂直に交わることになる。そのことは半径と弦が作る三角形の 3 辺が等しく、合同であることから即座に証明できるので、省略する。注意したいのは、l を中心から外へ向かって平行移動させた場合、常に半径は弦を垂直に 2 等分することである。

円と接線

これから円に外接する四角形について調べるのだが、そのような四角形はどんな特徴があるだろうか。そのために先の半径と弦の関係が重要になるのである。l が中心から離れるほど弦は短くなり、l がちょうど円と 1 点で交わるとき—すなわち接するとき—弦は消滅する。このとき、

定理　円の接線は、中心と接点を結ぶ線分（半径）と垂直に交わる

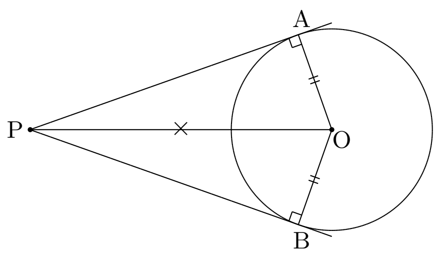
といえる。



これは定理というより事実に近い。その理由は、接点が 1 点で交わることにある。円は直径に対して—もちろん半径の左右に対しても—左右対称であるから、接点の右にも左にも交点はない。もし交点があれば左右ともになければならないが、そうすると接点を含め 3 つの交点ができてしまう。円と直線は**高々**2 つの交点しか持たないので、それはあり得ない。すると接線も半径に対して左右対称に交わっている。このことは交わる角度が平角の半分—すなわち直角であるということである。この事実をもとに次の定理が証明できる。

定理　円外から引いた 2 本の接線の長さは等しい

【証明】



P、O を結ぶ。△POA と △POB において

i)　$OA = OB$（円の半径で等しい）

ii)　$PO = PO$（共通の辺である）

iii)　$\angle PAO = \angle POB = 90^\circ$（円と接線の定理より）

i), ii), iii) より △POA と △POB は、直角三角形の斜辺と他の 1 辺が等しく合同である。

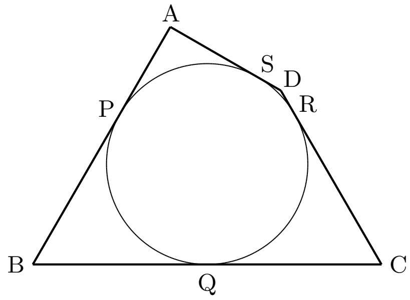
合同な図形の対応する辺や角の大きさは等しいので

$PA = PB$

がいえた。■

円に外接する四角形

次に、円に外接する四角形について取り上げる。定理というわけではないが、円と円に外接する四角形—それは四角形と四角形に内接する円でもある—についての性質である。性質とは、図において $AD + BC = AB + DC$ が成り立つことである。つまり、円に四角形が外接しているとき、四角形の向かい合う辺の和は等しいことになる。



【証明】

四角形の辺と円の接点を順に P、Q、R、S とする。

円外の点から引いた接線の定理より、

$AS = AP$、$BQ = BP$、$CQ = CR$、$DS = DR$

が成り立つ。これらをすべて辺々足すと

$$AS + BQ + CQ + DS = AP + BP + CR + DR$$

であるが、足す順や頂点の順を適宜変えて

$$(AS + SD) + (BQ + QC) = (AP + PB) + (DR + RC)$$

を得る。これは求めたい関係式のことである。 ■

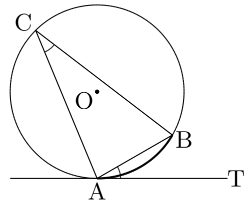
接弦定理

円の弦や接線がそれぞれ話題になったところで、それらが関連した定理を述べてみよう。

接弦定理

円の接線と弦が作る角は、

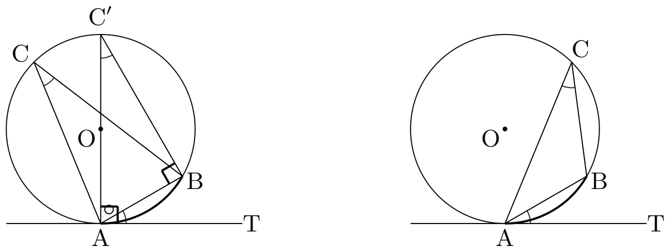
弦にかかる弧に対する円周角に等しい



言葉の説明だけでは少し分かりづらいかもしれない。接線と弦が作る角というのは、あくまでも接点から円周に向けて引いたときにできる角—図の∠BAT のようなもの—を指すことに注意され

たい。決して、任意の弦の延長が接線と交わってできる角ではない。また、図では∠BAT と∠C が等しいことになっているが、接線との間にできる弦 CA の側の角についても同じことが言える—つまり∠B に等しい—ことも指摘しておこう。証明は、弦 AB 側の角でも弦 CA 側の角でも同じことであるが、円周角の位置によって少し違うところがある。

【証明】



円周角の内側に円の中心がある場合とない場合で、若干違う点があるが、証明に際しては、O と接点 A を通る円周角を考えればよいので、左図の場合だけ示すことにする。

証明したいことは $\angle BAT = \angle C$ である。そこでまず $\triangle \mathrm{ABC}'$ に注目する。

この三角形は直径を斜辺とする直角三角形であるから、三角形の内角の和について

$$\angle C' + 90^\circ + \circ = 180^\circ$$

の関係がある。すなわち、$\angle C' + \circ = 90^\circ$ である。

また、$\angle BAT + \circ = 90^\circ$ であるから、この 2 つの事実より、

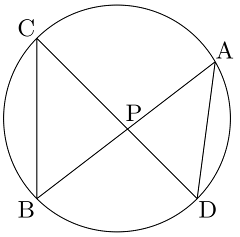
$$\angle C' = \angle BAT$$

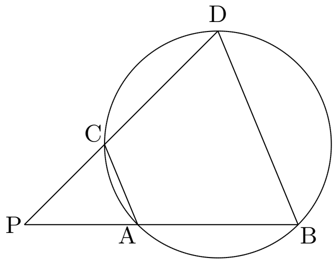
である。ところで、∠C と∠C′ は同じ $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角であるから $\angle C = \angle C'$ である。

これで、定理が証明された。 ■

方べきの定理

もう 1 つ定理を導いてみよう。この定理は**方べきの定理**と呼ばれて使い勝手が良いのだが、実際に問題を解くときは定理を知らなくても大丈夫なものが多い。その理由は、円周角の定理や内接四角形の定理を応用して解ける範囲に収まるからである。そのことは次の説明において、定理になる直前の式を見れば分かると思われる。では、既知の定理を使うだけで、方べきの定理にたどり着く様子を見ることにしょう。





図の △PAD と △PCB において、同じ弧に対する円周角は等しいことから、$\triangle PAD \sim \triangle PCB$ であることはすぐに分かるはずである。相似な図形は対応する辺の比が等しいので

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}、すなわち \quad PA \cdot PB = PC \cdot PD \quad (※)$$

が成り立つことが分かる。

右図においても、内接四角形の外角と内角の関係から、$\triangle PAC \sim \triangle PDB$ もすぐ分かる。ここでも対応する辺の比に※と同様のことが成り立つ。

この証明から何が分かったのだろう。それは

方べきの定理　円の弦 AB、CD の交点を P とすると、$PA \cdot PB = PC \cdot PD$ が成り立つ

ということである。定理としてはきれいな形になっているが、内容は単に相似比が等しいことを述べたに過ぎない。