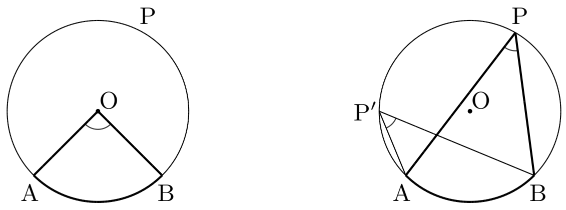
中心角と円周角

三角形は、外心や内心の存在が示すように円との相性が良い。四角形、もしくはそれより辺の数が多い多角形はそうではない。多角形に外接したり内接したりする円は、存在することもあれば存在しないこともある。

円は 1 点からの距離が等しい点の集合である。円周上の一部分は**弧（こ）**といい、記号を用いて $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ と書くことがある[1]。ただ、これだと円周上に A、B だけが与えられた場合、2 つできる弧のいずれかがはっきりしないことがある。そのときは $\overset{\frown}{\mathrm{APB}}$ のように言えば、どちら側の弧かはっきりする。



$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ と中心 O を線分で結んでできる$\angle\mathrm{AOB}$ を、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する**中心角**という。また $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ と、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ 上にない円周上の点 P を線分で結んでできる$\angle\mathrm{APB}$ を、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する**円周角**という。1 つの弧に対する中心角は 1 つだが、円周角は無数にある。

円周角の定理

中心角と円周角の関係として、次の定理がある。

> **円周角の定理**
>
> 同じ弧に対して、円周角の大きさは中心角の大きさの $\dfrac{1}{2}$ である
>
> また、同じ弧に対する円周角は等しい

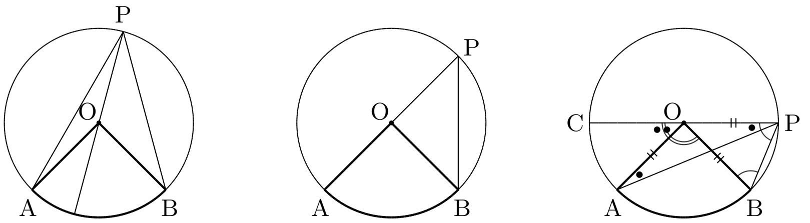
さらに、この定理から派生する定理がある。それは

半円周に対する円周角は直角である

というものである。半円周に対する中心角は直径、すなわち 180° であるから、円周角が中心角の半分であるならそれは 90° であるはずだ。しかし、これが正しいことを言うには、円周角の定理を証明しなくてはならない。まず、円周角の大きさが中心角の大きさの半分であることから示そう。

[1] $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ は “弧 AB” と読む。

【証明】



中心角と円周角の位置関係は、P の位置によって 3 通り考えられる。いずれの場合でも、PO を延長して証明することに変わりないので、いちばん右の場合だけ示すことにする。

まず、円の半径はどれも等しいので、△OBP と △OAP はともに二等辺三角形である。

二等辺三角形の底角は等しく、三角形の外角は隣にない 2 角の和であることから、△OBP の外角である∠BOC と △OAP の外角である∠AOC について、

$$\angle BOC = 2\angle OPB、\angle AOC = 2\angle OPA$$

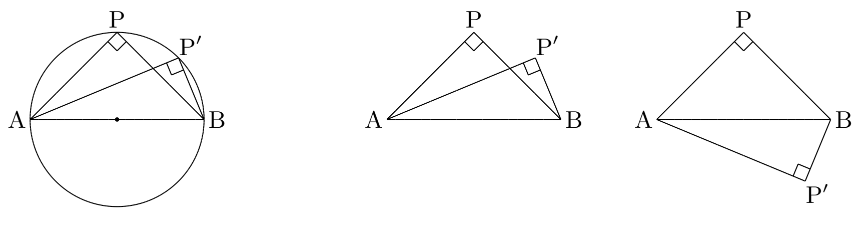
がいえる。これら 2 式を辺々引いて

$$\angle BOC - \angle AOC = 2(\angle OPB - \angle OPA)$$

を得るが、これは中心角 AOB が円周角 APB の 2 倍であることを示している。■

さて証明の仕方を振り返ると、P の位置によらず円周角が中心角の $\dfrac{1}{2}$ であることが分かるので、結局、P の位置がどこであっても常に中心角の半分の大きさになっている。これは、同じ弧に対する円周角が等しいことを意味する。

また、半円周 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ の中心角は 180° であるから、$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角は必ず 90° になる。



逆に、斜辺 AB を共有する直角三角形 ABP、ABP′ があれば、4 点 A、B、P、P′ は 1 つの円周上にあることが分かる。なぜなら、AB を直径とする円は 1 つに決まり、P、P′ はいずれもその円周上の点になっているからである（この一般化は後で説明する）。

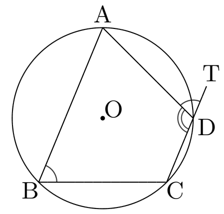
内接四角形の性質

円に内接する四角形には、特別な性質がある。それは十分定理として使える。

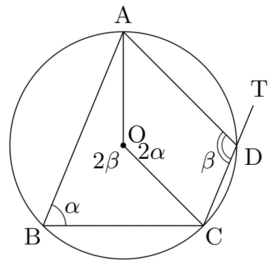
定理（円に内接する四角形の性質）

向かい合う内角の和は 180° であり、

1 つの内角とその対角の外角は等しい



【証明】



O と A、C を結び、$\angle B = \alpha$、$\angle D = \beta$ とおく。

∠B と∠ADC は、それぞれ $\overset{\frown}{\mathrm{ADC}}$ と $\overset{\frown}{\mathrm{ABC}}$ に対する円周角である。

したがって、それらの中心角は O の周りの角で、それぞれ円周角の 2 倍なので

2α、2β となる。

$2\alpha + 2\beta = 360°$ であるから、$\alpha + \beta = 180°$ である。

また、このことと $\angle ADT + \beta = 180°$ より、$\angle ADT = \alpha$ がいえる。 ■

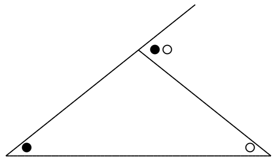
内接四角形の性質の逆

円に内接する四角形の性質が明らかになったのであるが、逆に、これらの性質を持つ四角形は円に内接するだろうか。それを確認するために、あまりにも当たり前かもしれない定理を示しておく。

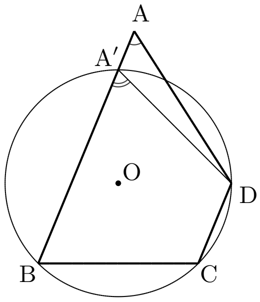
定理

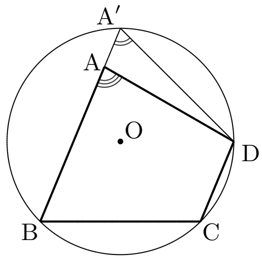
三角形の 1 つの外角は、

その隣にない内角より大きい



証明は書くほどのことはない。外角は ● + ○ だから、外角は隣にない内角—つまり ● または ○—より大きいことは明らかである。





さて、向かい合う内角の和が 180° であり、かつ、円に内接していない四角形 ABCD があったとする。すなわち $\angle A + \angle C = 180°$ であるとする。三角形には必ず外接円があるので、3 点 B、C、D を通る外接円を描くことができる。四角形 ABCD は円に内接していないのだから、A は円の外側、もしくは円の内側の点である。

A が円の外側にあれば AB と円周とに、交点 A′ が存在する。△AA′D において、いま示したばかりの定理より $\angle BA'D > \angle A$ がいえる。$\angle A + \angle C = 180°$ なので、$\angle BA'D + \angle C > 180°$ である。これは、円に内接する四角形の内角の和が $\angle BA'D + \angle C = 180°$ であることに反する。したがって、$\angle A + \angle C = 180°$ であれば、A は B、C、D を通る円の外側にない。

同様に、$\angle A + \angle C = 180°$ であれば、A は B、C、D を通る円の内側にないこともいえる。よって、$\angle A + \angle C = 180°$ であれば、A は B、C、D を通る円周上になければならない。すなわち、四角形 ABCD は円に内接する。

定理　四角形の向かい合う角の和が 180° ならば、四角形は円に内接する

この定理は次のように言い換えてもよい。言葉遣いがまるで異なるが、内容は同じである。

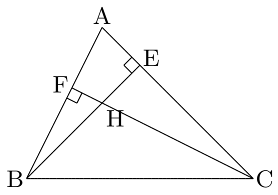
定理　1 つの内角とその対角の外角が等しい四角形は、円に内接する

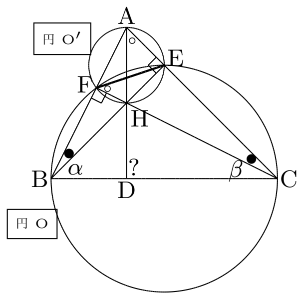
三角形の垂心は 1 点で交わる

さて、これでようやく三角形の垂心が 1 点で交わることを証明する準備が整った。図形の証明には、よく補助線を引いて見通しをよくする手法が使われるのであるが、この場合は補助円を作図して証明することになる。

x-y 座標平面を使ってよければ、直線の方程式を持ち出して簡単な計算で確認できるのだが、あくまでも作図による証明をすることにしよう。

【証明】





3 本の垂線が 1 点で交わるかどうか分からないが、2 本の垂線は必ず交わるので、垂線 BE と CF の交点を H とする。

まず、F、B、C、E を通る円 O が存在する。なぜなら、E、F は直径を BC とする円の円周角にあたる点だからである。

また、A、F、H、E を通る円 O′ が存在する。なぜなら、四角形 AFHE は向かい合う角の和が 180° であるからである。

ここで、A、H を通り辺 BC に交わる線分 AD を引く。ただし、この線分は H を通るが BC と垂直に交わるかどうかは分からない。

さて、右図において $\bullet$ の角は、円 O の $\overset{\frown}{\mathrm{FE}}$ に対する円周角であるから等しい。

いま、$\angle EBC=\alpha$、$\angle FCB=\beta$ とおくと、△EBC においても △FBC においても、三角形の内角の和が 180° であることから、

$$\alpha+\beta+\bullet=90^\circ \text{（※）}$$

が分かる。

さらに、円 O の $\overset{\frown}{\mathrm{EC}}$ に対する円周角で $\angle EBC=\angle EFC$ であり、なおかつ円 O′ の $\overset{\frown}{\mathrm{EH}}$ に対する円周角で $\angle EFH=\angle EAH$ が分かる。すなわち、$\circ=\alpha$ である。

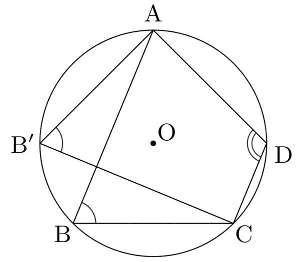
この状況において △ADC を見ると、三角形の内角の和は

$$\circ+\beta+\bullet+?=\alpha+\beta+\bullet+?=180^\circ$$

になっているのだが、※より $?=90^\circ$ が結論づけられる。ゆえに、垂線 AD は H を通る。 ■

円周角の定理の逆

最後に円周角の定理の逆を述べてみよう。内接四角形の性質をもう一歩進めて、向かい合う角の和が角 180° である四角形 ABCD と AB′CD を考える。



この 2 つの四角形は、内接四角形の性質の逆より、円に内接している。円は、3 点を与えるとただ一つに決まるので、A、C、D が共通である 2 つの四角形に接している円は同じ円である。$\angle B = \angle B'$ であるから、結果的に線分 AC の同じ側にある角—この場合は B と B′—が等しいとき、4 点 A、B、B′、C は同一円周上にあることになる。これは、円周角の定理の逆に他ならない。