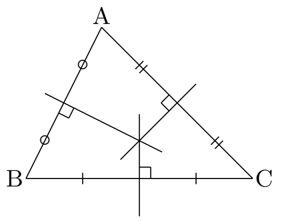
三角形の外心

ここからしばらく三角形の “芯” について調べていこう。最初に登場する芯は次のものである。

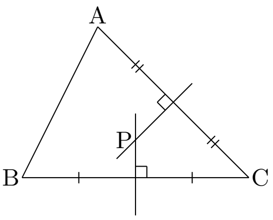
定理（三角形の外心）

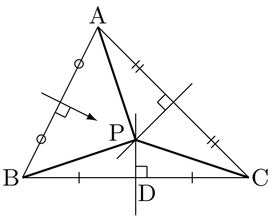
三角形の各辺の垂直二等分線は、

1 点で交わる



【証明】





辺 BC と辺 CA の垂直二等分線は交わるので、その交点を P とする。

P と各頂点 A、B、C を結ぶと、△PBC、△PAC はどちらも二等辺三角形になる。

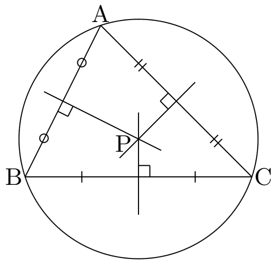
たとえば △PBC が二等辺三角形であることは、△PBD と △PCD において、2 辺の長さと間の直角がそれぞれ等しいことから $\triangle PBD \equiv \triangle PCD$ となって、対応する辺の $PB = PC$ が分かるからである。

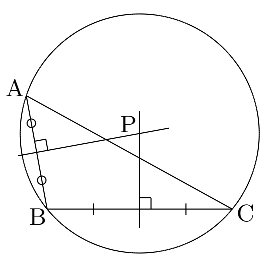
同様に $PA = PC$ も分かるので、結局 $PB = PA$ となる。

すると △PAB も二等辺三角形であるといえる。

したがって、この二等辺三角形の底辺の垂直二等分線は、頂点 P を通る。 ■

各辺の垂直二等分線が 1 点で交わり、この点が三角形の 3 つの頂点から等しい距離にあるのなら、P を中心とする半径 PA（または PB、PC）の円は三角形の外側をちょうど覆うことになる。このような円を**外接円**と呼び、外接円の中心を**外心（がいしん）**という。円の中心であるから “心” の字を使うが、三角形の “芯” であることに違いはない。





鈍角三角形の場合は、外心は三角形の外にあることを注意しておこう。

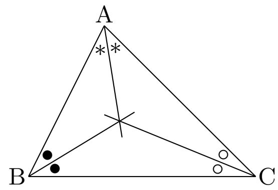
三角形の内心

三角形の辺を 2 等分するという考えがあれば、角を 2 等分するという考えは自然なことである。実際、三角形のそれぞれの角を 2 等分すると、それらは 1 点で交わる。

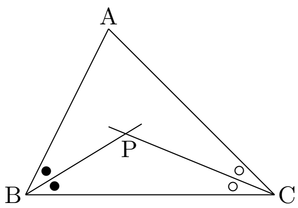
定理（三角形の内心）

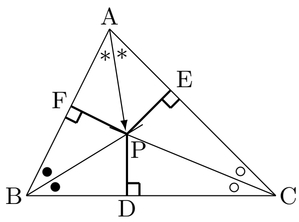
三角形のそれぞれの角の 2 等分線は、

1 点で交わる



【証明】





角 B と角 C の 2 等分線は交わるので、その交点を P とする。

P から各辺 BC、CA、AB へ垂線を引くと、$\triangle PBD \equiv \triangle PBF$、$\triangle PCD \equiv \triangle PCE$ がいえる。なぜなら、それらは斜辺と 1 つの角がそれぞれ等しい直角三角形だからである。

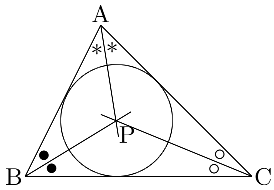
その結果、$PD = PF$ と $PD = PE$ がいえるので、$PE = PF$（※）である。

このとき角 A の 2 等分線を引いて、それが P に交わればよいのだが、角 A の 2 等分であることを無視して AP を結ぶと、△PAE と △PAF は、共通の辺 AP と※で得られた等しい辺を持つ直角三角形であるから、$\triangle PAE \equiv \triangle PAF$ である。

合同な図形の対応する角は等しいので、$\angle PAE = \angle PAF$ がいえる。

すなわち、角 A の 2 等分線は線分 AP に他ならない。 ■

証明から分かるように、P から各辺までの距離は等しいので、P を中心とする円は三角形の内側にちょうど収まる。このような円を**内接円**と呼び、内接円の中心を**内心（ないしん）**という。



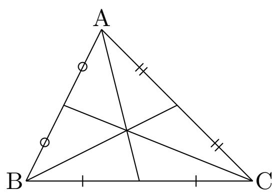
三角形の重心

辺や角を 2 等分する以外にも作図はできる。各辺に垂直二等分線をたてる代わりに、各辺の 2 等分点—すなわち中点—と頂点を結んでもよいだろう。中点と頂点を結ぶ線分を**中線（ちゅうせん）**と呼ぶことにすれば、中線は 1 点で交わるといえる。

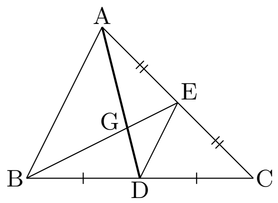
定理（三角形の重心）

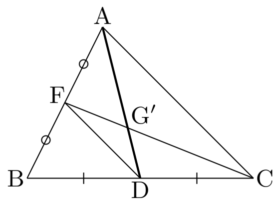
三角形のそれぞれの中線は、

1 点で交わる



【証明】





3 本の中線が 1 点で交わるかどうか分からないが、2 本の中線は必ず交わる。

中線 AD と BE の交点を G、中線 AD と CF の交点を G′ とする。

$\triangle GAB$ と $\triangle GDE$ は $AB//DE$ であるから、$\triangle GAB \sim \triangle GDE$ であり、相似比が $2:1$ であることが分かる。なぜなら $\triangle CAB \sim \triangle CED$ であり、この相似比が $2:1$ だからである（このことは後で中点連結定理として述べる）。

したがって、他の対応する辺の比も等しいので $AG:DG=2:1$ である。すなわち、G は AD を $2:1$ に内分する点ということである。

同様に、$\triangle G'AC \sim \triangle G'DF$ から $AG':DG'=2:1$ である。すなわち、G′ は AD を $2:1$ の比に内分する点である。

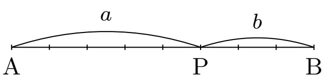
このことは G と G′ が同じ点であることを示している。 ■

G を三角形の**重心**と呼ぶ。重心はとくに円と関わりがないが、物理的な重心と一致している。また、この証明から次のことが分かったので定理としておきたい。

定理　三角形の重心は中線を 2 : 1 に内分する

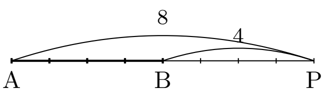
＊　＊　＊

話が前後するが、線分を $a:b$ に分けることは、単に分割と言わず $a:b$ の比に**内分**するという。



これまであまり注意を払わなかったが、たとえば上の図は「P は線分 AB を $a:b$ に内分する」と言う。実は線分には向きがあって、これを「P は線分 BA を $b:a$ に内分する」と言っても同じことである。

線分に向き付けが必要な理由は、線分の分割に**外分**という考えがあるからだ。



線分を外側で分けるというのも変な話だが、図を見ればそれが「P は線分 AB を 2 : 1 に外分する」ことは納得できるだろう。このとき「P は線分 AB を 1 : 2 に外分する」と言えば、P の位置は A から左に 4 だけ離れたところになる。▌

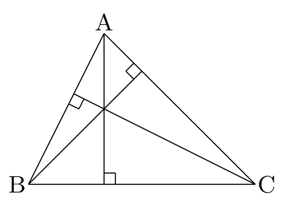
三角形の垂心

一般に、三角形の外心、内心、重心が一致することはない。しかし正三角形では、これら 3 つの “心” は一致する。なぜなら正三角形においては、辺の垂直二等分線、角の二等分線、中線は皆同じ線だからだ。そしてそれらの線は、頂点から向かいの辺に引いた、単なる垂線でもある。当然、正三角形の 3 本の垂線は外心その他の心と一致する。垂線の交点は**垂心**と呼ばれる。もちろん正三角形でなくとも、三角形の垂心は存在する。

定理（三角形の垂心）

三角形のそれぞれの頂点から引いた垂線は、

1 点で交わる



ただし、このことを証明するには円に関する知識が必要となる。そこで、垂心に関する定理を証明する準備として、円と角についての話をしなくてはならない。