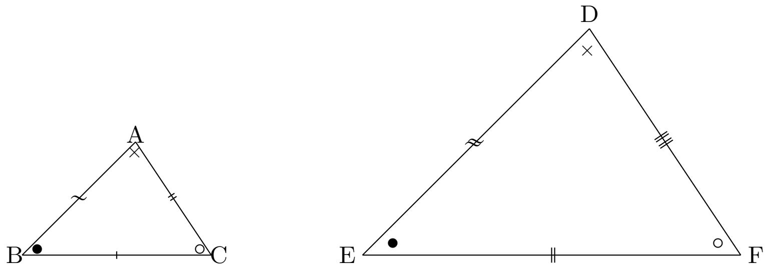
相似な図形

合同の考えは図形を調べる上で重要であるが、それ以上に**相似（そうじ）**の考えが大切であろう。合同も相似も、図形が同じ形であることを保証するものだが、相似は大きさについては寛容である。つまり、拡大・縮小して合同になる図形を相似な図形と言う。また、△ABC と △DEF が相似であるとき、$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ のように表す[1]。



たとえば相似な三角形においては、対応する角の大きさは等しい。しかし三角形の大きさが違うので、対応する辺の長さは等しくない。すると相似な図形においては、角の大きさだけが拠り所になるかというとそうでもない。ちゃんと等しいものが存在する。それは**辺の比**である。拡大・縮小するということは、形を変えずに引き伸ばす、または縮めることである。このことはどの辺に対しても同じ割合で伸ばしたり縮めたりすることを意味するので、その割合は一定している。それを**相似比**と呼ぶ。相似比は比の形で表したり、分数で表したりする。$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ であるとき、

$$AB : DE = BC : EF = CA : FD$$

が成り立つ。同時に、比の前後を逆にした $DE : AB = EF : BC = FD : CA$ も成り立つ。一般に、$m : n = \dfrac{m}{n}$ であるから、上の式は

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} \quad \text{または} \quad \frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FD}{CA}$$

と書くことも多い。むしろ、分数で表す方が比を 1 つの値で—たとえば $\dfrac{AB}{DE} = k$ のように—できて便利であるから、相似比は好んで分数で書かれるものである。

*　*　*

拡大や縮小というと、現代ではコピー機による拡大・縮小に思いがいくであろう。実際、A4 サイズの書類を A3 サイズに拡大したり、A5 サイズに縮小したりすることがある。数字が 4 から 3 に小さくなる場合が拡大で、4 から 5 に大きくなる場合が縮小ということに違和感を持つかもしれない。これは、用紙の基準が 0 サイズであり、それを 2 つ折りにするごとに—つまり小さな用紙になるごとに—数字が 1, 2, 3, . . . と大きくなる決まりなので仕方ない。

[1] 日本では相似の記号に “∽” を使うことが多いようだが、“∼” も一般的に使われる。TEX でも “∼” が標準である。

2 つ折りというのは半分の大きさになるわけだから、$\dfrac{1}{2}$ の縮小と表現するであろう。しかし、コピー機に表示される数値は 0.71 程度であるはずである。逆に 2 倍の大きさに拡大する場合は、コピー機は 1.4 程度の数値を表示するだろう。この理由は、拡大や縮小というものがあくまで長さに対して行われることに起因している。たとえば A4 の用紙を A3 に拡大する場合は、用紙の大きさが 2 倍になるのであるが、これは面積が 2 倍になっているのである。面積が 2 倍になることは辺の長さが $\sqrt{2}$ 倍になることであるので、コピー機は $\sqrt{2} \approx 1.414$ を表示するのである。▮

三角形の相似条件

拡大・縮小は辺の長さに影響を与えるが角の大きさには影響を与えない。このことから 2 つの三角形が相似である条件は、合同条件と比較して次のようにまとめることができる。

三角形の相似条件：

a) 3 辺の長さの比がそれぞれ等しい

b) 2 辺の長さの比とその間の角がそれぞれ等しい

c) 2 つの角がそれぞれ等しい

ところが c) は合同条件とだいぶ違っている。合同条件にならえば c) は

1 辺の長さの比と両端の角が等しい

となるであろう。合同条件のときに確認したが、「両端の角」は「2 つの角」でも同じことである。また「1 辺の長さの比」と言っても、その辺以外に比べるものがないわけだから、比の値は何であってもかまわない。結局、相似条件として必要なものは 2 つの角の大きさだけで十分なのである。

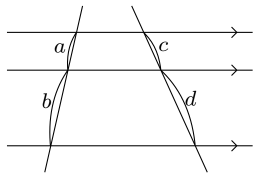
平行線の間にある線分の比

三角形の相似条件は極めて重要なことを教えてくれる。それが次の定理である。

定理

図のように平行線に挟まれた線分は、

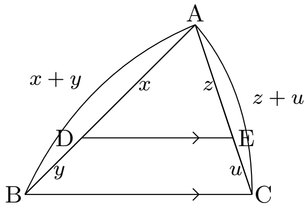
$a : b = c : d$　の関係にある



このことを示す前に、三角形 △ABC の中に 1 つの辺と平行な線分 DE を引くと

$$AD : DB = AE : EC \text{（下の図では } x : y = z : u\text{）}$$

であることを示す。

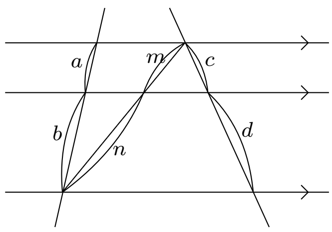


△ABC と △ADE において、$BC//DE$ だから同位角は等しい。ゆえに、$\angle ABC = \angle ADE$ がいえる。また、∠A は共通の角である。以上より、対応する 2 つの角が等しいことがいえたので、$\triangle ABC \sim \triangle ADE$ である。

相似な図形の対応する辺の比は等しいので $AB : AD = AC : AE$ が成り立つ。

この比を分数で表すことにすると $\dfrac{x+y}{x} = \dfrac{z+u}{z}$ である。この式は $1 + \dfrac{y}{x} = 1 + \dfrac{u}{z}$ に変形でき、その結果 $\dfrac{y}{x} = \dfrac{u}{z}$ となる。これで、$x : y = z : u$ 　がいえた。その上で先の定理を証明しよう。

【証明】



平行線の間に図のように線を引いて、それが平行線によって $m : n$ に分割されているとする。

このとき、たったいま得た関係から

$a : b = m : n = c : d$

がいえる。すなわち　$a : b = c : d$　である。 ■

さて、これまでにいくつかの定理を見てきたが、定理の述べ方は基本的に

（かくかく）ならば（しかじか）

という風に書かれていただろう。日常的には「**あれ**ならば**これ**である」ことと「**これ**ならば**あれ**である」ことは、ほぼ同じようにとらえるに違いない。しかし数学の世界では、そう簡単な話ではない。

「A ならば B である」の順番を逆に述べた「B ならば A である」は、もとの命題の逆と呼ぶことは前に述べた。しかも面倒なことに、逆は必ずしも正しくないのである。その例についても、前に偶数の積に関して述べている。

当然のことながら、逆を言っても真実であることに変わりない例もある。たとえば

三角形が二等辺三角形である ならば 三角形の 2 つの角の大きさは等しい

と言った場合、これは正しい。そして、その逆である

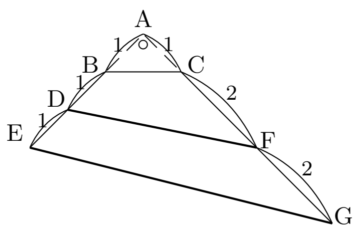
三角形の 2 つの角の大きさが等しい ならば 三角形は二等辺三角形である

も正しい。それが二等辺三角形の性質であると言ってしまえばそれまでだが、ある命題が逆を含めて正しいかどうかを知ることは重要である。なぜなら、使い勝手が格段に違うからだ。

それでは、たったいま証明した定理の逆である

線分が $a : b = c : d$ の関係にある ならば 線分は平行線に挟まれている

は正しいだろうか。結論から言えばそれは正しくない。反例があるかからだ。



たとえば 2 辺の長さがともに 1 である三角形 ABC を考える。そして、三角形の辺 AB を 1 ずつ延長し、延長点を D、E とする。また、辺 AC は 2 ずつ延長し、延長点を F、G とする。このようにすると、3 本の直線 BC、DF、EG に挟まれた線分は $1 : 1 = 2 : 2$ の関係になっている。

しかし、△ADF において角 A を挟む辺の比は $2 : 3$ であり、△AEG において角 A を挟む辺の比は $3 : 5$ であるから、2 つの三角形は相似ではない。相似でない図形は対応する角—たとえば∠ADF と∠AEG—は等しくない。つまり、DF と EG は平行ではないのである。

これまで何度となく述べてきた、定理の逆が正しいとは限らない例を目にしたことになる。