平行四辺形

三角形の合同条件を用いて、平行四辺形のいろいろな性質を証明してみよう。その前に平行四辺形の定義であるが、それは “平行” 四辺形という名称から

定義　向かい合う辺が平行である四角形を平行四辺形という

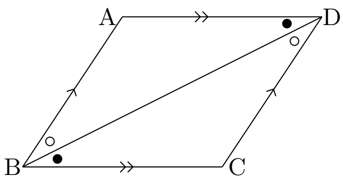
ことにする。平行四辺形は見て分かる通り、向かい合う辺の長さや向かい合う角の大きさは等しい。ただし、このことは見て分かる事実ではなく、平行四辺形であるからこそ示すことができる定理なのである。

定理（平行四辺形の性質）

平行四辺形の向かい合う辺の長さは等しい

また、向かい合う角の大きさは等しい

【証明】



B、D を結ぶ。△ABD と △CDB において

i)　$BD = DB$（共通の辺である）

ii)　$\angle ADB = \angle CBD$（AD // CB の錯角[a]）

iii)　$\angle ABD = \angle CDB$（AB // DC の錯角）

i), ii), iii) より △ABD と △CDB は、1 辺とその両端の角が等しく合同である。

合同な図形の対応する辺や角の大きさは等しいので

1)　$AB = CD$ および $AD = CB$

2)　$\angle A = \angle C$

がいえた。また、ii) に iii) の左右を入れ替えた式を辺々加えると、$\angle ADB + \angle CDB = \angle CBD + \angle ABD$ であるが、これは

3)　$\angle B = \angle D$

であることを表している。■

[a]記号 // は “平行” を表す。

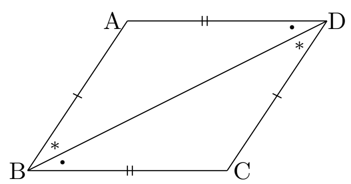
以上のことは平行四辺形に備わった性質ということであるが、図形を調べる際に平行四辺形を利用することは多々あるので、これは定理として扱いたい。

平行四辺形の性質を持つ四角形

四角形が平行四辺形の性質—向かい合う辺の長さが等しい、向かい合う角の大きさが等しい—を持てば、その四角形は平行四辺形と言ってよいだろうか。平行四辺形の性質を持っているのだから当然だと考えてはいけない。何かの性質というのは単に表現に過ぎないので、正しいかどうかは証明しなくてはならないのである。はじめに、向かい合う辺の長さが等しい四角形について考察しよう。

定理　向かい合う辺の長さがそれぞれ等しい四角形は、平行四辺形である

【証明】



B、D を結ぶ。△ABD と △CDB において

i)　$AD = CB$（向かい合う辺が等しいという、仮定より）

ii)　$AB = CD$（向かい合う辺が等しいという、仮定より）

iii)　$BD = DB$（共通の辺である）

i), ii), iii) より △ABD と △CDB は、3 辺が等しく合同である。

合同な図形の対応する辺や角の大きさは等しいので

1)　$\angle ADB = \angle CBD$

2)　$\angle ABD = \angle CDB$

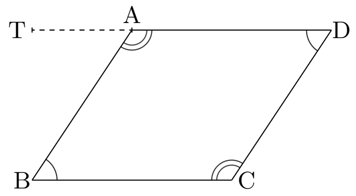
がいえる。

このことは 1) より $AD//BC$ を、2) より $AB//DC$ を意味するので、四角形は平行四辺形である。 ■

続いて、向かい合う角の大きさが等しい四角形についての考察である。

定理　向かい合う角の大きさがそれぞれ等しい四角形は、平行四辺形である

【証明】



これまでずっと見てきたように、平行四辺形は 2 つの三角形に分割できた。

つまり、平行四辺形の内角の和は三角形 2 つ分であるから 360° である。すなわち

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$

がいえる。仮定より $\angle A = \angle C$、$\angle B = \angle D$ であるから、これらを辺々足して

1) $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ$

2) $\angle A + \angle D = \angle B + \angle C = 180^\circ$

であることが分かる。<u>同じ側の内角の和が 180° である 2 直線は平行</u> であるから、

1) より $AD//BC$、2) より $AB//DC$ がいえた。 ■

*　*　*

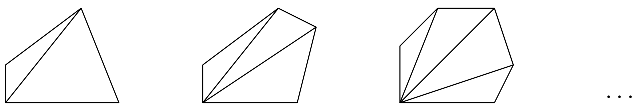
証明の中で下線を引いた部分は、これまでに定理として扱っていなかったはずである。しかし、図の点線の周りの角を見れば分かると思うが、たとえば $\angle A + \angle B = 180^\circ$ であれば、それは $\angle TAB = \angle B$ を意味する。なぜなら平角は 180° だからである。これは錯角が等しいことに他ならないので、$AD//BC$ であると結論づけたのである。

2 つの直線の内側にある角の組を同側内角（どうそくないかく）、外側にある角の組を同側外角と呼ぶことにして、改めてこれらの表現を用いて

同側内角または同側外角の和が 180° である 2 直線は、平行である

という定理にしてもよいだろう。

さらに証明の中で、平行四辺形の内角の和が 360° であることに言及したが、一般に n 角形は $(n-2)$ 個の三角形に分割できる。



したがって

$$\boxed{n \text{ 角形の内角の和は } (n-2) \times 180^\circ}$$

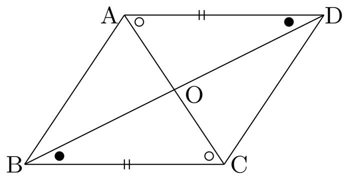
であるといえる。▌

平行四辺形の対角線

平行四辺形には、対角線に関する性質も見つけられる。平行四辺形の対角線は対称性を持っている。次の性質を定理に加えておこう。

定理　平行四辺形の対角線は、それぞれの**中点（ちゅうてん）**で交わる

【証明】



AC と BD の交点を O とする。△OAD と △OCB において

i)　$AD = CB$（平行四辺形の性質）

ii)　$\angle ADO = \angle CBO$（$AD // BC$ の錯角）

iii)　$\angle DAO = \angle BCO$（$AD // BC$ の錯角）

i), ii), iii) より △OAD と △OCB は、1 辺と両端の角が等しく合同である。

合同な図形の対応する辺や角の大きさは等しいので

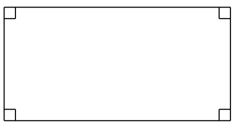
1)　$AO = CO$

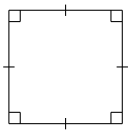
2)　$BO = DO$

がいえる。■

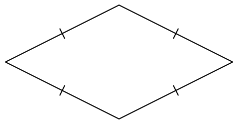
＊　＊　＊

向かい合う辺がそれぞれ平行である四角形が平行四辺形の定義なら、長方形や正方形は平行四辺形ということになる。





実際、長方形も正方形も平行四辺形の性質—向かい合う辺の長さはそれぞれ等しい、向かい合う角の大きさもそれぞれ等しい—を持っている。したがって、長方形と正方形は間違いなく平行四辺形なのである。平行四辺形は歪んでいると思い込んではいけない。長方形は、平行四辺形の性質のうち、向かい合う角が「それぞれ等しい」ではなく「すべて等しい」となった特別な場合なのであり、正方形は、さらに向かい合う辺の長さが「すべて等しい」となった平行四辺形なのである。では、平行四辺形の性質のうち、向かい合う角だけがすべて等しい図形は何であろうか。それは、ひし形と呼ばれる図形である。



　このように考えると、正方形は長方形やひし形の性質をすべて持っている。つまり、正方形は、平行四辺形でもあり長方形でもありひし形でもあるのである。▮