直角三角形の合同条件

直角三角形は三角形の中で特別な存在である。それは 1 つの角が直角というだけでなく、他の三角形にない特別な性質を備えているからである。そのことは合同条件にも現れている。なぜかというと、直角三角形の場合は三角形の合同条件を律儀に当てはめる必要がないからだ。

直角三角形は、直角が特別な角であると同時に斜辺も特別な辺であることに注意しよう。一見、直角を作る 2 辺の方が斜辺より特別な感じを受ける。しかし、この後の話や三角比の話にも関連するのだが、斜辺こそ直角三角形の鍵を握っているのである。たとえば合同条件の

c) 1 辺の長さと両端の角がそれぞれ等しい

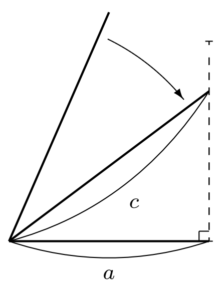
については、1 辺を斜辺と読み替えた場合、両端の角の大きさを 2 つとも知る必要はない。なぜなら、直角以外の 1 つの角の大きさが分かることと、すべての角の大きさが分かることは同じことだからである。したがって c) は

c′) 斜辺の長さと他の 1 つの角がそれぞれ等しい

と言い直してもかまわない。また、合同条件の

b) 2 辺の長さとその間の角がそれぞれ等しい

については、斜辺ともう 1 辺の長さが分かれば、間の角の大きさを知る必要はない。



なぜなら、他の 1 辺は直角を作るもう一方の辺であるから、この長さが決まっているなら、直角を作る残りの 1 辺も確定するからである。その理由は、三角形の合同条件に関して述べたとおり、「2 辺の長さと任意の 1 つの角が等しい」条件のうち、「確定しない辺が長い」場合にあたるからである。図からも分かるように、長さ c の辺が斜辺だから $c > a$ である。このことから b) は

b′) 斜辺の長さと他の 1 つの辺がそれぞれ等しい

と言い直してもかまわない。

以上のことから直角三角形においては、三角形の合同条件を少し崩した形の合同条件が成り立つことになる。

直角三角形の合同条件：

a) 斜辺の長さと他の 1 つの角がそれぞれ等しい

b) 斜辺の長さと他の 1 つの辺ががそれぞれ等しい

二等辺三角形の性質

当たり前のことだが、二等辺三角形は 2 辺の長さが等しく、2 つの角の大きさが等しく、そのために 2 つ折りにするとぴったり重なる。これは経験から得られた知識に違いないし、経験から得られた知識は正しいことが多い。ただ数学となると話は別で、以上の性質がきちんと成立していることを示さなくてはならない。

まず、二等辺三角形とはどのような図形を指すかを明確にしなくてはならない。実は、これにはいろいろな決め方、すなわち定義の仕方がある。私たちは “二等辺” 三角形という名称から、

定義　二等辺三角形とは、2 辺の長さが等しい三角形である

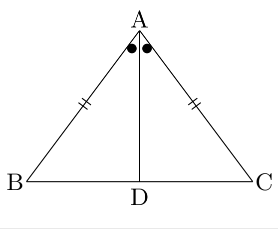
としよう。このとき、二等辺三角形を 2 つ折りにしてぴったり重なるということは、数学の言葉でどのように言うべきだろうか。二等辺三角形の等辺に挟まれた角を**頂角**、頂角以外の 2 つの角を**底角（ていかく）**と呼んで説明してみよう。

2 つ折りにするということは頂点を 2 つに折ることなので、それは頂角を 2 等分すると言い換えることができる。ぴったり重なるということは重ねたときにずれが生じないことなので、重なる角—それは底角である—は同じ大きさでなくてはならない。また、同時に底辺も等分される必要がある。すなわち、二等辺三角形を 2 つ折りにしてぴったり重なるという表現は、数学の言葉で言うなら

定理（二等辺三角形の性質）

二等辺三角形の底角は等しい

頂角の二等分線は底辺を 2 等分する



となるだろう。これを定理としたのは、きちんと証明する必要があるからだ。証明は以下のようになる。

【証明】

頂角 A の二等分線と底辺 BC との交点を D とする。

△ABD と △ACD において

i) $AB = AC$（二等辺三角形の定義より）

ii) $AD = AD$（共通の辺である）

iii) $\angle BAD = \angle CAD$（頂角を 2 等分したという、仮定より）

i), ii), iii) より △ABD と △ACD は、2 辺とその間の角が等しく合同である。

合同な図形の対応する辺や角の大きさは等しいので

1) $\angle B = \angle C$

2) $BD = CD$

がいえた。

また、$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ なので、$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ である。これより、定理はもう少し強い主張である「頂角の二等分線は底辺を垂直に2 等分する」に書き換えられる。 ■

* * *

証明の書き方には何か決まりがあるのだろうか。あると言えばあるし、ないと言えばない。証明とは、つまるところ物事が正しいことを理路整然と書き下してあればよいのである。その意味では証明に書き方の決まりはない。しかし、いくら正しいことが筋道立てて書いてあっても、それを読む者が理解に苦しむようでは困る。そのために、証明の書き方にはある程度の習慣が存在し、それが約束ごとのように定着しているといってよいかもしれない。

証明においては、まず仮定と結論が明確にされている必要がある。仮定はあらかじめ設定された事柄で、その設定は正しくなされているものとして扱う。結論は最終的に示したいことで、直接的であれ間接的であれ仮定とその他の事実から導かれるものである。一般に証明すべきことは

“かくかく”（という仮定が正しい）ならば、“しかじか”（という結論に至る）である

という命題形式で問われることが多い。先の「二等辺三角形の底角は等しい」という命題は、正しくは

三角形が二等辺三角形であるならば、その底角は等しい

と言うべきところである。つまり、三角形が二等辺三角形であることを仮定すれば、その他の事実から底角が等しいことが導かれるのである。

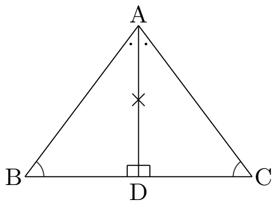
また、辺や角を記述する際には、対応する順に記述するのがよい。具体的には、一方の三角形の辺を AB のように—つまり、頂点 A→ 底角 B の順に—読んだら、対応する辺も頂点 → 底角の順に AC と記述するのがよい。▮

2 つの角が等しい三角形

では逆に、2 つの角が等しい三角形は二等辺三角形と言えるだろうか。それは当たり前だと思うだろうが、その当たり前のことは説明できなくてはいけない。いまはまだ、そのことを証明していない段階である。そのため、2 つの角が等しい三角形という言い方をしていた。底角という言葉は、二等辺三角形に使われる言葉だからである。定理は以下の表現となる。

定理　2 つの角が等しい三角形は、二等辺三角形である

【証明】



はじめに、頂点 A から底辺 BC に向けて垂線を下ろし、垂線の足を D とする（△ABC は二等辺三角形かどうか分からないのだから、$AD \perp BC$ 以外に、D は BC の中点だとか、AD は∠A を 2 等分しているとかは不明である）[a]。

このとき △ABD と △ACD において

i)　$AD = AD$（共通の辺である）

ii)　$\angle ADB = \angle ADC = 90°$（垂線を下ろしたという、仮定より）

iii)　$\angle BAD = \angle CAD$（※）

※がいえる理由は、三角形の内角の和が 180° であることと、$\angle B = \angle C$ を仮定してることから、残る対応する角も等しいからである（決して∠A の 2 等分線だからという理由でないことに注意しよう）。

i), ii), iii) より △ABD と △ACD は、1 辺とその両端の角が等しく合同である。

合同な図形の対応する辺や角の大きさは等しいので

$AB = AC$

がいえた。　■

[a]記号 ⊥ は “垂直” と読む。また、垂線を下ろしてできる交点を “垂線の足” という。