三角形の決定

回転や平行移動でぴったり重なる図形は同じものである。それに加えて、裏返して重なっても同じものと認めよう。いずれにせよ、図形の形を変えることがない操作でぴったり重なる図形は**合同（ごうどう）**な図形と呼ばれる。図形の基本は三角形であるから、まずは三角形の合同について調べておこう。

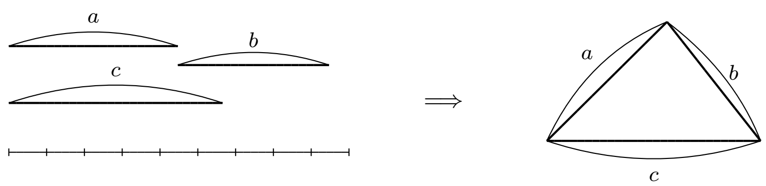
三角形を構成する要素は、3 つの辺と 3 つの角である。したがって、それらがすべて同じ大きさなら 2 つの三角形は合同であり、違うものがあれば合同ではない。しかし合計 6 つの要素のうち、ただ 1 つだけが違っているなどということはあり得ない。たとえば角度の大きさが 2 つまでは同じであるが、残りの 1 つは違うということはない。なぜなら三角形の内角の和は 180° であるから、2 つまで同じ値であれば 3 つめの角度の値も同じでなければならないからである。

そう考えると、三角形が合同であるかどうかを知るには、何もすべての辺の長さと角の大きさを調べる必要はない。一部の要素が同じことが分かれば、残りは自動的に確定するような組み合わせがあるからだ。では、そのような組み合わせにはどんなものがあるだろうか。

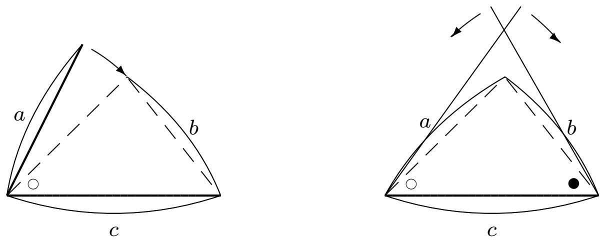
そのことを考えるには、三角形を作図するためには最低限どれだけの情報が必要かを知ることである。たとえば 3 辺の長ささえ分かれば、三角形はただ 1 つ作図できる。もちろん短い順に選んだ 2 辺の長さ a, b の和が、一番長い辺の長さ c より小さければ三角形ができないので、

$$a+b>c$$

であることが条件である（このことは後で詳しく述べよう）。



三角形が 1 つに決まるために 3 辺の長さが分かることの裏側には、2 辺だけでは三角形の形を決めようがないが、2 辺の先端の距離がちょうど残りの辺の長さになったとき、2 辺の位置が固定されるという意味がある。このことは同時に、2 辺の間の角の大きさが固定されることでもある。すなわち、3 辺の長さを決めることによって三角形が固定されることと、2 辺とその間の角の大きさを決めることによって三角形が固定されることは同じ意味を持つ。



似たような考えをすると、3 辺の長さを決めることによって三角形が固定されることと、1 辺とその両端の角の大きさを決めることによって三角形が固定されることも同じ意味であることが分かる。

三角形の合同条件

いくつかの条件がそろうと三角形が 1 つに決まることが分かった。これが何を意味するかというと、その条件のもとで三角形を描けば、誰がどこに描いても寸分違わぬ三角形になるということである。すなわち、それが三角形が合同かどうかを決める条件なのである。

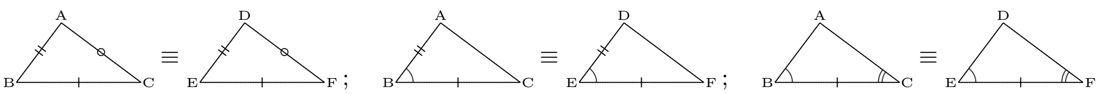
三角形の合同条件：

a) 対応する 3 辺の長さがそれぞれ等しい

b) 対応する 2 辺の長さとその間の角がそれぞれ等しい

c) 対応する 1 辺の長さと両端の角がそれぞれ等しい

2 つの三角形が合同のときは記号 $\equiv$ を用いて、$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ という書き方をする[1]。記号を図形と図形の間に入れることは奨励しないが、三角形が合同であることを視覚に訴えるために使うにはよいだろう。



* * *

三角形の合同条件のうち、c) は

c′) 対応する 1 辺の長さと 2 つの角がそれぞれ等しい

と読み替えてもかまわない。というのは、三角形の内角の和は 180° であるから、任意の 2 つの角の大きさが分かることは 3 つの角の大きさが分かることでもある。それは 1 つの辺の長さと両端の角が分かることであるから、c′) は c) とまったく同じことを言っている。

---

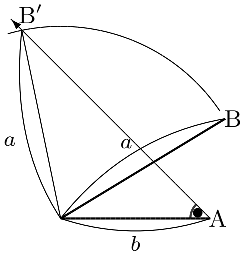
[1]△ABC は “三角形 ABC” と読む。また、合同（congruence）の記号は TeX など一般には ≅ を使うようだが、日本の習慣では同等（equivalent）の意味を持つ ≡ を使うようである。

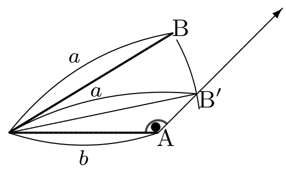
しかし b) は

b′) 対応する 2 辺の長さと 1 つの角がそれぞれ等しい

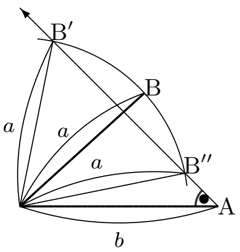
に読み替えることはできない。それはもちろん、任意の 1 つの角が分かったからといって、他の 2 つの角が決まるわけではないからだが、そのことで三角形が 1 つに決まらない例を挙げられなければ、b′) が正しくないことを納得することは難しいだろう。

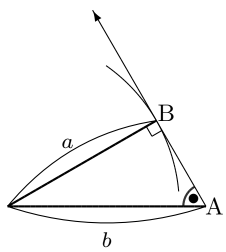
実は、2 辺の長さが分かっていて、2 辺の間にない角の大きさが分かっている場合は、短い辺の先端が作る角が分かってい場合と、長い辺の先端の作る角が分かっている場合とでは状況が違うのである。





図において $a > b$ であるとする。短い辺 b の先端が作る角 A の値が分かっている場合、辺 b と角 A は固定される。したがって、長さが分かっている辺 a は、角 A が鋭角でも鈍角でも B′ で交わるように決まる。すなわち、このような状況にあるときならば、三角形は 1 つに決まるのである。

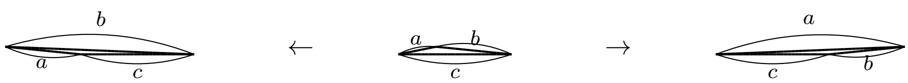




しかし $a < b$ であるときは事情が異なる。それは、固定された角 A の延長上に辺をとるとき、B′ と B″ のように 2 か所に辺がとれることがある。これでは三角形が 1 つに決まったことにはならない。もし、$a < b$ でありながら三角形が 1 つに決まるとしたら、それは固定された角 A の延長上に辺が 1 つしかとれない場合、すなわち直角三角形ができる場合に限られる。▌

三角形ができるとき

合同条件に関して三角形が 1 つに決まる状況を見てきたが、それ以前に三角形が描けるためにはどんな条件が必要だろうか。たとえば、3 辺の長さが 1、2、5 では三角形はできない。1、2、3 でもできない（これを高さ 0 の三角形と呼べば別だが)。



高さ 0 の三角形を考えるのは現実的でないので、高さが 0 に近い三角形を考えてみたい。図は少し見づらいのだが、3 辺の長さがそれぞれ a、b、c の三角形が、図の真ん中のようになっていれば、3 辺に

$$a + b > c \quad (※)$$

という関係がなければ三角形はできない。

さて、真ん中の三角形のてっぺんを左方向や右方向に平行移動させてみよう。それぞれ左図と右図のようになるが、その場合は 3 辺に $a + c > b$（左図）や $b + c > a$（右図）という関係がなければ三角形はできない。これらの式は

$$b - a < c、\quad a - b < c$$

と書き直すことができる。したがって※と合わせて、三角形ができる条件は

$$\boxed{|a - b| < c < a + b}$$

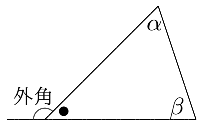
であるといえる。絶対値記号を用いたのは、$a - b$ や $b - a$ が負の値のなることはないので、簡単に記述するためである。

三角形の辺と角の大小関係

さらに三角形の基本的な性質を述べることにする。まず、

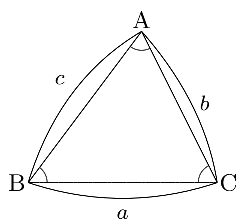
> **定理**　三角形の外角は、その隣にない 2 つの内角の和に等しい

ことを指摘しておく。もちろん証明すべきことであるが、わざわざ証明文を書くことはないであろう。



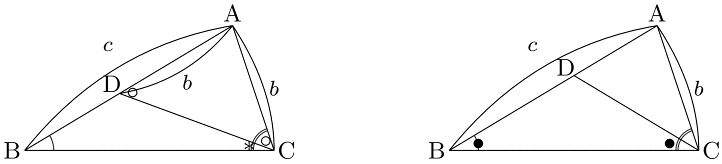
定理が正しいことは、図において平角が 180° であることと、三角形の内角の和が 180° であることから直ちに分かる。その上で次の定理を証明しよう。

> **定理**
> 三角形の辺と角には次の関係がある
> $b < c \iff \angle B < \angle C$
> $c < a \iff \angle C < \angle A$
> $a < b \iff \angle A < \angle B$



こんなことは当たり前と思うかもしれない。たしかに経験上、これが事実であることは身にしみているであろう。しかし、このようなことであっても、証明すべきことなら証明を与えるべきなのである。

【証明】



はじめに左図において、$b < c \Longrightarrow \angle B < \angle C$ を示す[a]。

c は b より長いことが仮定されているので、辺 AB 上に長さ b の線分 AD をとれる。

すると △ADC は二等辺三角形であるから、図の ∘ の角は等しい（このことは、事実ではなく後で証明することである）。

$\angle C = \circ + *$ とおく。また、三角形の外角は隣にない 2 つの内角の和であるから、△DBC の外角 ADC に対して、$\circ = \angle B + *$ が成り立つ。

これらのことより $\angle C = \angle B + * + *$ がいえるので、$\angle B < \angle C$ が示された。

次に右図において、$\angle B < \angle C \Longrightarrow b < c$ を示す。

∠C は∠B より大きいので、∠C の内側に∠B と同じ大きさの角 ● がとれる。

その角を作る線分が AB と交わる点を D とする。

△DBC は二等辺三角形であるから、$DC = DB$（※）である（このことも、事実ではなく後で証明することである）。

△DAC において、三角形の辺の長さには $AC < AD + DC$ の関係がある。※より DC は DB に読み替えてよいので、$AC < AD + DB$ となるが、これは $b < c$ のことである。 ■

[a] $\Longrightarrow$ は “ならば” と読む。

＊　＊　＊

三角形の頂点を A、B、C としたとき、△ABC の各辺の長さには a、b、c を使うことが多い。つまり、頂点や名称には大文字を、長さなどの値には小文字を使う習慣がある。また、同じアルファベットを使うときは頂点と向かいの辺を組にして、たとえば頂点 A の対辺の長さは a とする習慣である。習慣は規則ではないので、柔軟に使うのがよいだろう。

また、証明の中では**線分** AD という表現をしている。日常的には直線 AD と言うのだろうが、数学で直線というのは、限りなく延びているまっすぐな線を指すので、AD のような限られたまっすぐな線は、線分と呼んで区別するのである。▌