平面図形

ものには様々な形がある。自然界においては動植物の姿や雲の形、人工物においては道具や着物の形など、およそ形のないものは無いと言ってよい。現代は、本当にたくさんのものが人の手で形作られている。ものを作るときは闇雲に作ってもうまくいかないので、設計図のようなものが利用されるだろう。設計図には何らかの図形が描かれているのであるが、図形のことを知らずに設計をすることはできない。文明の進歩とともに複雑な図形を含む設計図が必要になってきている。しかし、どんなに複雑な図形であっても、基本になるのは直線で囲まれた図形や円などである。そこで、とくに平面に描くことのできる**平面図形**の性質について調べることにしよう。

定義と定理

平面図形の性質といっても、たとえば正方形の折り紙は対角線に沿って折るとぴったり重なるとか、円を描いたコンパスの幅をそのままにして円周を 6 等分できるとか、日常の作業の中で経験的に知っていることは数多くあると思われる。ただ経験だけに頼っていると、いずれどこかで破綻しないとも限らない。そうならないためにも、なぜ正方形は対角線に沿って折れば重なるのかということを、理路整然と説明できる必要がある。しかし万人にきちんと説明するとなると、相応の説明方法が要求される。そこで、万人が認める正しい事実だけを用いて、理路整然と説明する方法をとることにする。これを**証明**といい、万人が認める正しい事実は**定義**と呼ばれる。

ところが、万人が認める正しい事実を正確に言葉で定義するのは容易ではない。これから平面図形について考察するわけだが、では、平面とはどういうものかと問われると答えに窮するのではないだろうか。平面とは一様に限りなく広がっている面である、という説明はもっともらしいが、表面がつるつるの地球を想像してみると、地球の面は一様に限りなく広がっているととらえることができる。すると、球面も平面と同等なものということになってしまう。厳密さを追求するなら、たとえ平面の定義ひとつをとってもおろそかにできない。ただ、あまり厳密さを追求しても息苦しいだけなので、厳密さは程々にしておきたい。そのような態度で平面を定義すれば

定義　平面とは一様に限りなく平らに広がっている面である

と述べるぐらいが適当であろう。

平面がどのようなものか理解できたら、次は平面上に描かれた図形を考えよう。図形は直線や曲線で形作られたものを指すが、では、直線はどのように定義されるのだろう。ユークリッドは、点

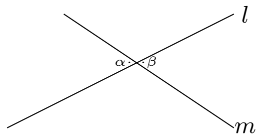
と直線を次のように定義した[1]。

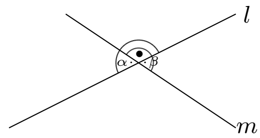
定義　点とは、場所を占める大きさがないものである
定義　直線とは、一様にまっすぐ延びる線である

　このように書かれても、実際は分かったような分からないような感覚になるだけであろう。むしろ、いたずらに言葉で説明するよりも、普段から自然に感じている点と直線と言った方が誤解されないかもしれない。

　もう少し現実的な問題へ進むことにする。2 直線が交わるならば、交わりは 1 点であり、その周りには 4 つの角ができる。向かい合うそれぞれの角の組を**対頂角（たいちょうかく）**といい、次の**定理**が成り立つ。

定理　対頂角は等しい





　定理とは、いくつかの定義とそれまでに確認された定理だけから導かれるものをいう。ここまでに定理は何ひとつ確認されていないので、対頂角が等しいことはいくつかの定義だけから証明されなくてはならない。いかにも常識的なことがらであるが、証明は次のようにすればよい。

【証明】

上の右図において

$$\alpha = (\text{平角}) - \bullet$$

$$\beta = (\text{平角}) - \bullet\ .$$

よって、$\alpha = \beta$。　■

　ここでは暗に「等しいものから同じものを引いた残りは等しい」という事実を認めている。もし、このような**明らかな**ことにも説明を加える必要があるなら、それは数学というより哲学に近いのではないだろうか。

＊　＊　＊

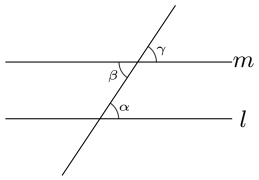
　平角（へいかく）とは直線上の任意の点の周りの角度を表す言葉である。私たちはそれを 180° と認識しているのだが、これまでに角度の測り方については何も言及されていない。そのため単に平角と言うことにし、平角はどこにあっても等しいと考えることにする。

[1]ユークリッドまたはエウクレイデス (紀元前 3 世紀?)：古代ギリシアの数学者、天文学者。

また、言葉が堂々巡りすることになるが、平行移動して重なる 2 直線は**平行**であるという。曖昧な定義であることは認めるが、ここではこれ以上追求しない。定義をどこまで遡るかは難しい問題なのである。▮

錯角と同位角

平行とは限らない 2 直線 l、m に別の直線が交われば、対頂角を含めいくつかの角の組ができる。



図の α と β のような位置関係にある角の組を**錯角（さっかく）**、α と γ のような位置関係にある角の組を**同位角**という。一般には錯角や同位角は等しいとは限らないが

定理　平行線においては、錯角は等しい、また、同位角は等しい

ことが言える。

同位角が等しいことは、同位角が平行線の対応する位置にあることから直ちに説明できる。なぜなら、平行移動して重なる角だからである。また錯角が等しいことは、対頂角が等しいことから直ちに分かる。それは、まず対頂角であることから $\beta = \gamma$ であり、同位角であることから $\alpha = \gamma$ であるので、$\alpha = \beta$ がいえるのである。

三角形の内角の和

平行線における錯角が等しいことを利用して、小学校時代から馴染んでいる

定理　三角形の内角の和は 180° である

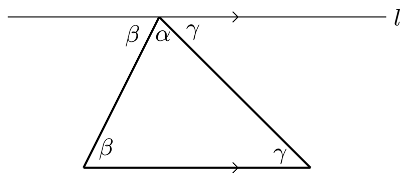
を証明しておこう。本来ならその前に、角度とは何かなどを事細かに定義すべきなのであるが、とことん厳密さを追求することはしない。図形について根本から構築することに興味があるなら**ユークリッドの原論**に関する書籍を読むとよいだろう。

ただし、ひとつだけ定義を与えておこう。

定義　平角は 180° である、また、平角の半分（90°）を**直角**という

角度は 2 直線が交差するところにできるが、2 直線が重なると角は消滅する。しかしここでは平角ができたと考えることにし、数値で 180° を与えることにする。つまり、角度は数値で測定できるものと定めるのである。しかし、単位 ° についてはとくに触れることはしない。さて、これらを踏まえて証明に入ろう。

【証明】



三角形の 3 つの角の大きさを、それぞれ α、β、γ とし、$\alpha + \beta + \gamma = 180°$ を示す。

三角形の 1 つの頂点を選ぶ。その頂角の大きさを α としても一般性を失わない。

選んだ頂点を通り、頂点の向かいの辺と平行な直線 l を引く。

すると選んだ頂角 α の両側の角は、平行線における錯角であるから、それぞれ β、γ に等しい。

$\alpha + \beta + \gamma$ で平角になるので、これは 180° である。 ■

*　*　*

いまの例では、頂角 α に関する証明をしたに過ぎないように見えるだろう。しかしこの場合は、頂角が α であろうが β であろうが本質は同じである。そのことが “一般性を失わない” という言葉で表されているのである。証明は漏れがあってはならないが、同じことを何度も繰り返し述べる必要もない。この他にもよく使われる言葉で “同様に” というものがある。いずれも証明が冗長になることを防いでいる。証明で使われる言葉には独特な表現のものが多いので、使いながら慣れていくのがよいだろう。▌

定理の逆

定理は、その表現の仕方がいろいろあっても、突き詰めれば

「かくかくである」ならば「しかじかである」

ということを述べている。「かくかくである」を**仮定**といい「しかじかである」を**結論**という。つまり定理の証明とは、仮定から結論を導く論証であるとも言える。錯角・同位角に関する定理を、仮定と結論がはっきり分かるように言えば

$$\text{平行線に別の直線が交わる ならば 錯角は等しい、また、同位角は等しい} \quad (※)$$

となるだろう。

では逆に、錯角や同位角が等しくなるように 2 本の直線に別の直線が交わっていれば、2 本の直線は平行であると言えるだろうか。このように、仮定と結論を逆に述べることは**逆**という。一般に定理の逆を述べた場合、それは必ずしも新しい定理になるわけではない。なぜなら、ある定理が正しくても、逆が正しいとは限らないからである。たとえば

偶数と偶数の積は 偶数である

という**命題**は**真（しん）**である。つまり正しい。しかし、その逆の

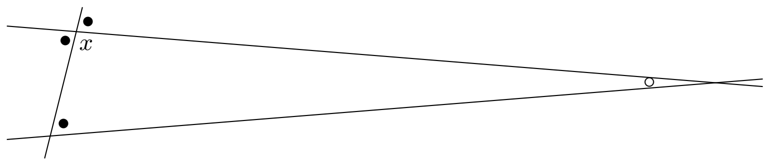
偶数は 偶数と偶数の積である

は**偽（ぎ）**である。実際 10 という偶数は、2×5 であるという**反例**—つまり、偶数と偶数の積になっていない例—があるからだ。

さて、※の逆は真である。すなわち

定理　錯角が等しい、または、同位角が等しければ 2 直線は平行である

ことが言える。なぜなら、錯角や同位角が等しいにもかかわらず 2 直線が平行でない としたら、2 直線はどこかで交わり三角形ができているはずである。



図で三角形の内角の和は $x + \bullet + \circ = 180^\circ$ であるが、錯角や同位角が等しいことは仮定されているので、x の隣の角は $\bullet$ である。よって $x + \bullet = 180^\circ$ である。これらのことから $\circ = 0^\circ$ でなくてはならず、三角形ができていることにはならない。すなわち、錯角や同位角が等しいことを仮定すると三角形はできない—つまり 2 直線は交わらない—ことになるので、2 直線は平行でなければならないと結論できる。

*　　*　　*

ものごとが正しいことを示す場合、大抵は真実を積み上げて証明する。しかし、いまの説明では下線部のように、示したいことを**否定**するところから始めて矛盾が生じることを明らかにした。最初の否定が矛盾を生じさせた原因であるから、命題は否定してはいけなかった。これは**背理法（はいりほう）**と呼ばれる強力な証明方法である。▌