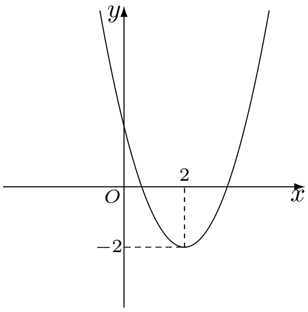
絶対値を含む関数

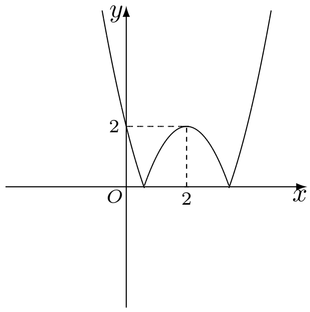
いま、簡単な関数を扱っている最中だが、関数に絶対値が含まれていてもそれほど複雑なことにはならない。たとえば

$$y = |x^2 - 4x + 2| = |(x-2)^2 - 2|$$

を考えてみよう。関数式全体が絶対値で囲まれているため、y の値が負になることはない。かりに、$x^2 - 4x + 2$ が負の値になったら、y の値は単に正負を反転させたものになる。このことは、グラフが $y < 0$ の範囲にあるときは、$y > 0$ になるように反転させることを意味する。



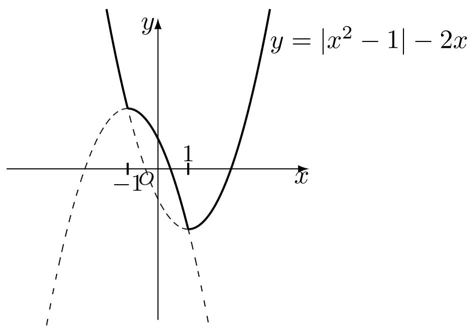
$\Rightarrow$



関数がもし、$y = |x^2 - 1| - 2x$ のようであったら、どうすればよいだろうか。それは、$x^2 - 1$ の正負によって扱いが異なるだろう。$x^2 - 1 \geqq 0$ であれば絶対値は無用の記号であるが、$x^2 - 1 < 0$ であれば正に反転させなければならない。$x^2 - 1$ は $x = -1, 1$ を境に正負が変わるので、関数式は

$$y = \begin{cases} x^2 - 1 - 2x & = (x-1)^2 - 2 \quad (x \leqq -1,\ 1 \leqq x) \\ -(x^2 - 1) - 2x & = -(x+1)^2 + 3 \quad (-1 < x < 1) \end{cases}$$

となるであろう。



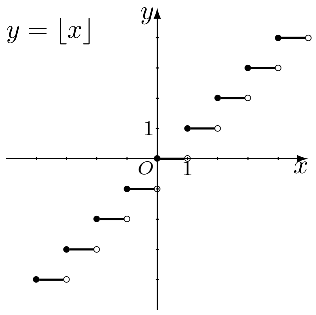
破線で示した 2 つの放物線のうち、定義域に関わる方を選択すれば求める関数のグラフということになる。

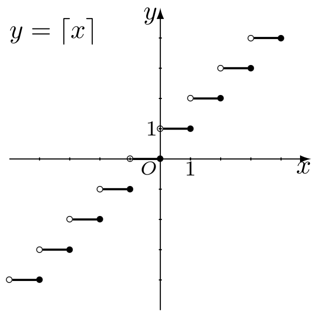
特殊な関数

簡単ではあるが特殊な関数も取り上げよう。それは

$$y = \lfloor x \rfloor \qquad \text{および} \qquad y = \lceil x \rceil$$

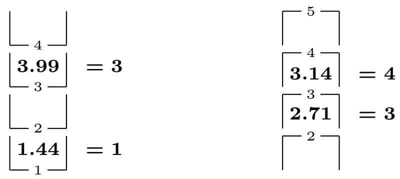
で、$\lfloor x \rfloor$ は**床関数**と呼ばれ、x を越えない最大の整数を与える関数、$\lceil x \rceil$ は**天井関数**と呼ばれ、x を下回らない最小の整数を与える関数である。いずれも x が整数なら、x になる。これらの関数のグラフは以下の通りである。





*　　*　　*

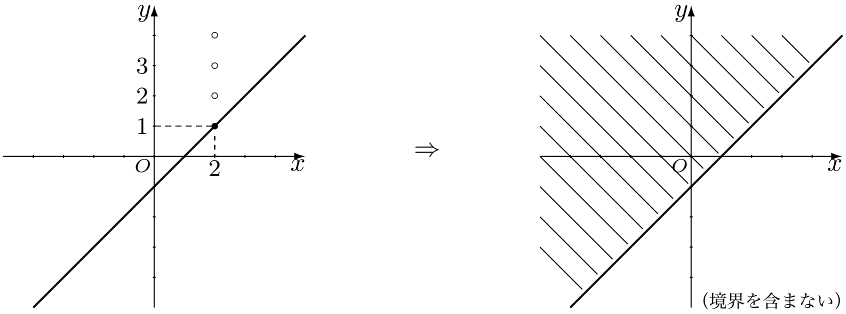
x を越えない最大の整数を与える関数を $[x]$ と書く場合もある。それはそれでよいのだが、これと対になる、x を下回らない最小の整数を与える関数が必要になったとき、どのように書けばよいのだろう。ならば $]x[$ でどうだ、という流儀もあろう。記号などというものは定着したもの勝ちだから、このような流儀がはびこっていたとしても不思議ではない。$+$, $-$, $\times$, $\div$ だって、定着するまで紆余曲折があったという。しかし、今となっては定規の目盛を連想させる $\lfloor\ \rfloor$、$\lceil\ \rceil$ のほうが分かりやすいだろう。



関数と領域

ここまでに、$y = f(x)$ の関係をグラフに描くことを数多く行ってきた。グラフとは何であろうか。それは、等式の関係を満たす x, y の組を、x-y 平面に示すことであった。では、$y > f(x)$ の関係を考えてもよいだろう。それは、不等式の関係を満たす x, y の組を、x-y 平面に示すことに他ならない。

では、具体的に $y > x-1$ の関係を調べることにしよう。もし関係式が $y = x-1$ であれば、たとえば $x=2$ に対してこれを満たす y は、$y=1$ 以外にあり得ない。それゆえ、(2, 1) に点を打つことができるのである。



しかし、いまは関係が $y > x-1$ であるから、たとえば $x=2$ に対してこれを満たす y は、$y=2$、$y=3$ のみならず、$y=1$ より上にある点はすべて該当している。このことは $x=2$ に限ったことではなく、x のあらゆる点において成り立つので、関係を満たす y は広い範囲に存在している。結果的に、直線 $y=x-1$ の上方はすべて条件を満たす。このような範囲を $y > x-1$ を満たす**領域**という。

ところで、x の区間に開区間、閉区間の区別があったように、領域にも似たような区別がある。関係式に使われた不等号には等号はないので、領域の境界にあたる直線 $y=x-1$ は領域の一部ではない。そのために、図にはその旨を記述してある。さらに芸の細かなことを言えば、領域を示すための斜線が直線に届いてないことが見て取れるだろう。つまり、領域と直線に隙間があるような描き方で、境界を含まないことをほのめかしているのである。

*　*　*

たとえば $y > x-1$ の領域が境界より上側か下側かを知る方法に、(0, 0) を不等式に代入してみる、というのがある。実際、$y > x-1$ に (0, 0) を代入すると $0 > -1$ となって、この不等式の関係は正しい。すなわち、原点は領域に含まれると解釈して、原点がある側に斜線を引けばよい、というものである。

だが、ちょっと待ってほしい。実際それは役立つ方法なのだろうか。それに、原点がちょうど境界線上にあったらお手上げである。いろいろな知識を得ることはよいと思うが、適切に使わないと本末転倒になってしまうので注意しよう。▌

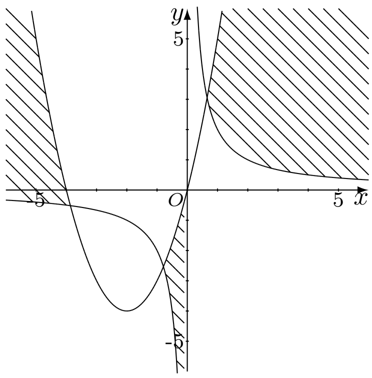
共通の領域

等号で結ばれた関数の関係を不等号に変えれば、不等式を満たす領域が図示できた。それでは、いくつかの不等式が与えられた場合の共通の領域について考えてみよう。同時に不連続な関数の領

域も扱っておこう。そのため元になる 2 つの式は、1 つは放物線を表す式、もう 1 つは双曲線を表す式としよう。双曲線が不連続な関数—定義域においては**連続関数**—である。

$$\begin{cases} y \leqq x^2 + 4x \\ y \geqq \dfrac{2}{x} \end{cases}$$

まず、境界にあたる部分を決めるために、等号に直して式を変形すると、$y = (x+2)^2 - 4$ および $y = \dfrac{2}{x}$ となる。グラフ描くことはとくに難しくないであろう。



さて領域であるが、放物線については “$y \leqq$” であるから境界の下側、双曲線については “$y \geqq$” であるから境界の上側が領域である。いまは、両方に共通した部分を求めることになるので、斜線部分が求める領域となる。不等号は等号も含まれるので、境界は領域に含まれる。ただし、双曲線は $x = 0$ で値をとらないので、y 軸は領域に含まれないことに注意しなくてはならない。