# 無理関数

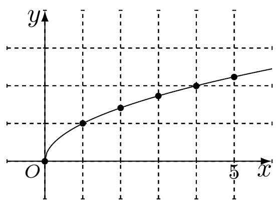
比例・反比例と 2 次関数。これまでに簡単な関数をいくつか扱った。比例である $y = ax$ から、基本の 2 次関数 $y = ax^2$ へ進んだら、次は $y = ax^3$、$y = ax^4$、$\ldots$ のように次数を増やせば新たな関数を考えることになる。同じように、反比例である $y = \dfrac{a}{x}$ から、$y = \dfrac{a}{x^2}$、$y = \dfrac{a}{x^3}$、$\ldots$ へ進むこともできるだろう。しかし、いたずらに次数が高いだけの関数を扱っても仕方ない。それに、もし一般的な $y - q = a(x - p)^n$ を考えるとなると、単に式が複雑になるばかりで得るものは少ないかもしれない。結局、四則計算の組み合わせで考えた関数というのは、低次元のいくつかを調査しておけば、大概の様子は分かるものである。

では、他に簡単な関数は考えられないだろうか。私たちが行う計算で、四則計算以外で馴染んでいるのは、平方根ぐらいであろうか。すると、自然な考えで $y = a\sqrt{x}$ を思い浮かべるのは、そう突飛な発想でもないだろう。このような関数は、式に無理数計算を含むので**無理関数**と呼ぶことがある。

いちばん簡単な例として、$y = \sqrt{x}$ を考えよう。根号があるので $x$ の変域は $x \geqq 0$ でなければならない。そのことを踏まえて

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 1 | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{3}$ | 2 | $\sqrt{5}$ | $\cdots$ |

のような表から、$y = \sqrt{x}$ のグラフを描くのはやさしいことである。




# 逆関数

$y = \sqrt{x}$ のグラフを見て、いままでに見たことがないグラフと思ってはいけない。放物線を寝かせたようなグラフに見えないだろうか。それもそのはず、$y = \sqrt{x}$ の両辺を 2 乗すると $y^2 = x$ であるが、文字の使い方に違いがあるが、まぎれもない $x = y^2$ なる 2 次関数になっている。もし、$y$ を定義域、$x$ を値域とすれば、これは $y = x^2$ と何ら変わるところはないのである。

一般に、$y = f(x)$ なる式を $x$ について解き、$x = g(y)$ の形にしたものを**逆関数**という。式はこのままでもよいのだが、ふつう関数の性質やグラフの形状などを調べる際には、慣れ親しんだ記述が分かりやすいので、逆関数は $y = g(x)$ のように、$x$ と $y$ の文字を変えて書く習慣がある。

さて、$y = \sqrt{x}$ から $x = y^2$ が得られたので、$y = \sqrt{x}$ の逆関数は $y = x^2$ である。ところで、ここで注意することがある。

関数とは、1 つの $x$ 値に対して 1 つの $y$ が決まるもの

という、取り決めがあるからだ。たとえば $y = \sqrt{x}$ は、$x$ として取れない値—負の値—はあっても、間違いなく 1 つの $x$ 値に対して 1 つの $y$ が決まる関係にある。よって、$y = \sqrt{x}$ は関数である。

ところが $x = y^2$ にしてしまうと、1 つの $x$—たとえば $x = 4$ —に対して $y = \pm 2$ が決まってしまう。このことは、文字を取り替えて $y = x^2$ としても同じことなので、関数とは言えなくなってしまう。そのため

$$y = \sqrt{x}\ (y \geqq 0) \quad \Rightarrow \quad y = x^2\ (x \geqq 0)$$

という関係で書かなくてはいけない。

## 逆関数のグラフ

$y = \sqrt{x}$ から $y = x^2$ の関係を導くことで、$y = \sqrt{x}$ の逆関数のグラフが分かるようになった。しかし、それは簡単な関数だからできることであって、たとえば $y = x^2 + 2x + 3$ の逆関数はどのようなグラフかと問われたら、すぐには描けそうにないと思うだろう。逆関数は "$y =$" の式を "$x =$" の式にするのだが、この場合はどうすればよいだろう。それには

$$y - 2 = x^2 + 2x + 1$$

のような移項をすれば

$$y - 2 = (x+1)^2 \quad \Rightarrow \quad x + 1 = \pm\sqrt{y-2} \quad \Rightarrow \quad x = -1 \pm \sqrt{y-2}$$

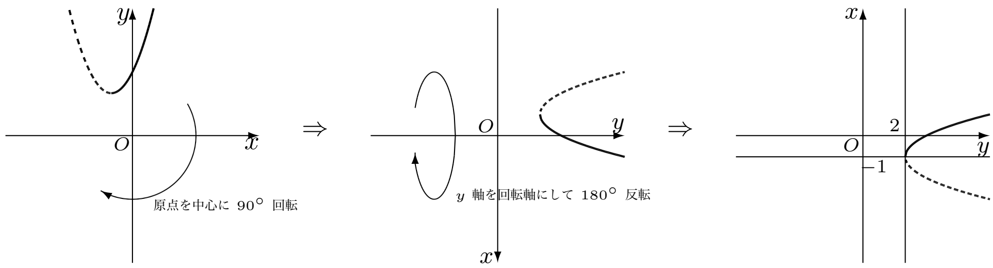
と変形して、無理関数であろうと予想できる。

しかし、逆関数を描く*だけ*ならば、何も $x$ について解く必要はないのである。なぜなら、逆関数とは $x$ と $y$ の立場が入れ替わっただけのことだから、グラフも $x$ と $y$ の立場を入れ換えれば済む話なのだ。それは単純に、$y$ 軸を横に、$x$ 軸を縦にするだけでよい。

実際にやってみよう。

$$y = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$$

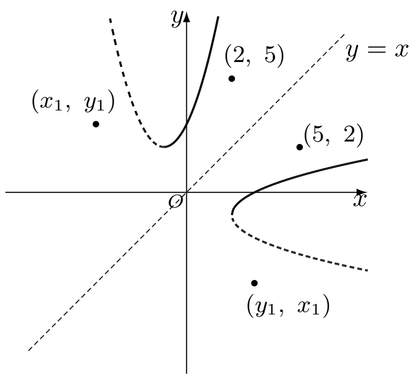
であるから、このグラフはすぐに描ける（左図）。




では、逆関数のグラフに仕立てよう。$y = x^2 + 2x + 3$ のグラフは透明なシートに描かれていると思ってほしい。そこで、シートを原点を中心に 90° 回転させる（左図 → 中図）。これで $y$ 軸が横に、$x$ 軸が縦になった。しかし、$x$ 軸は上を向いていてほしいので、$y$ 軸を回転軸にして 180° 反転させることにする（中図 → 右図）。これで $x$ 軸と $y$ 軸の立場が完全に入れ替わったので、グラフも逆関数のグラフになっているのである—回転や反転が分かるように、放物線を実線と点線で区別して描いた。

## 逆関数のグラフの特徴

逆関数は元の関数の $x$ と $y$ を入れ換えたものであるから、たとえば元の関数上の点 $(2,\ 5)$ は、逆関数上の点 $(5,\ 2)$ になっているはずである。一般に、元の関数上の点 $(x_1,\ y_1)$ は、逆関数上の点 $(y_1,\ x_1)$ である。




このことはちょうど、2 点が直線 $y = x$ について対称になっていることを示している。したがって、逆関数のグラフを描くことは、直線 $y = x$ について対称であるグラフを描くことなのである。

実際、先の $y = x^2 + 2x + 3$ を回転 $\to$ 反転してできたグラフは、$y = x$ について対称になっているだろう。

## 一般の無理関数

$y = a\sqrt{x}$ を基本の無理関数とすれば、これまでの流れ通り

> $y = a\sqrt{x-p} + q$ のグラフは、
> $y = a\sqrt{x}$ を $x$ 軸方向に $p$、$y$ 軸方向に $q$ だけ平行移動したグラフである

ことになる。さて、$y = x^2 + 2x + 3$ の逆関数は $x = -1 \pm \sqrt{y-2}$ であった。たしかに、$x = \sqrt{y}$ を、$y$ 軸方向に 2、$x$ 軸方向に $-1$ だけ平行移動したグラフになっていることが分かるであろう。

ところで、$\sqrt{\ }$ を含む関数を無理関数と呼ぶのなら、$y = \sqrt{ax^n + bx^{n-1} + \cdots + k}$ が無理関数の一般形とも思える。ただ $n \geqq 2$ の場合は、無理関数とは別の種類の関数となるので、ここでは $y = \sqrt{\tilde{a}x + b}$ を基本に考えることにする。すると無理関数は

$$y = \sqrt{\tilde{a}(x-p)} + q$$

とく方がこれまでの流れに沿うので、むしろ自然なのかもしれない。しかし、

$$\sqrt{\tilde{a}(x-p)} + q = \sqrt{\tilde{a}}\sqrt{x-p} + q$$

であるから、$\sqrt{\tilde{a}} = a$ とおけば、結局同じことなのである。