# 反比例

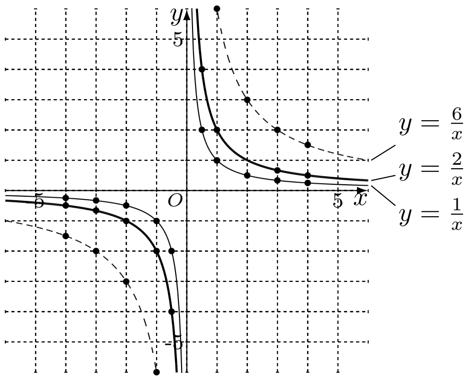
1 次関数が比例の関係にあるとしたら、反比例の関係にあるものは何だろう。一般に反比例の関係は

$$y = \frac{a}{x} \quad \text{または} \quad xy = a$$

であるが、$a$ の値を適当に変えて、反比例の関係を見ることにしよう。

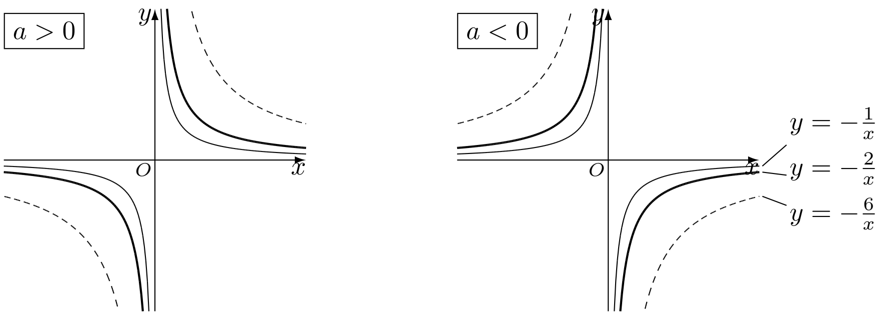
| $x$ | $\cdots$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{x}$ | $\cdots$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-1$ | $-2$ | - | $2$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\cdots$ |
| $\frac{2}{x}$ | $\cdots$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{2}{3}$ | $-1$ | $-2$ | $-4$ | - | $4$ | $2$ | $1$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ |
| $\frac{6}{x}$ | $\cdots$ | $-\frac{3}{2}$ | $-2$ | $-3$ | $-6$ | $-12$ | - | $12$ | $6$ | $3$ | $2$ | $\frac{3}{2}$ | $\cdots$ |

$x = 0$ に対する値がないのは、分母が 0 の分数は定義されないことによる。また、$y$ の値—値域—は $x = 0$ を中心に左右対称で正負が逆の値をとることも分かる。このことを視覚化しておこう。




グラフは**双曲線**と呼ばれる。2 次関数 $y = ax^2$ が $a$ の値によって放物線の広がりが変わるように、$y = \dfrac{a}{x}$ のグラフも $a$ の値によって曲がり具合が変わってくる。簡単に言えば、$a$ の値が大きいほど緩やかな曲線になるということだが、この言い方は正確さを欠いている。

$a < 0$ のときは実際に表にしなくても、$y$ の値が正負逆になることから、

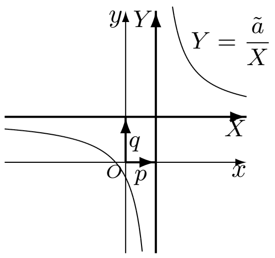


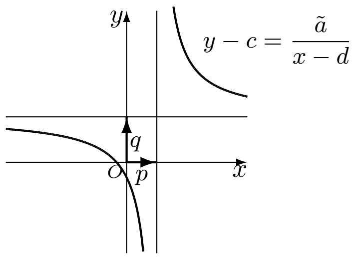
のようになるわけだから、$|a|$ の値が大きいほど緩やかな曲線になる、と言うべきである。

## 双曲線の平行移動

2 次関数の話で、$y = ax^2$ と $Y = aX^2$ の違いについて述べたことを覚えているだろうか。このとき、$Y = y - q$、$X = x - p$ であった。このような見方をすることで、$Y = aX^2$ のグラフが $y = ax^2$ のグラフの平行移動になっていることを確認したのである。しかもそれは、$X$ 軸, $Y$ 軸に対する $x$ 軸, $y$ 軸の位置を定めただけなので、関数のグラフは変化していないことに注意しよう。

さて、それなら $Y = \dfrac{\tilde{a}}{X}$ は $X$ 軸と $Y$ 軸に対しての双曲線である。




見ての通り、$Y = \dfrac{\tilde{a}}{X}$ のグラフは $y = \dfrac{\tilde{a}}{x}$ のグラフを $x$ 軸方向に $p$、$y$ 軸方向に $q$ だけ平行移動したものである。このことから

> $y = \dfrac{\tilde{a}}{x - p} + q$ のグラフは、
> $y = \dfrac{\tilde{a}}{x}$ を $x$ 軸方向に $p$、$y$ 軸方向に $q$ だけ平行移動したグラフである

といえる。

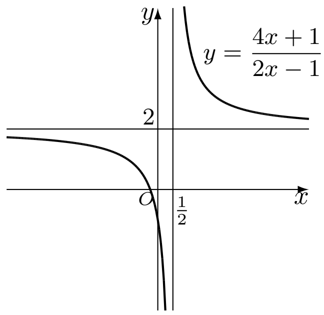
## 分数関数

たとえば 2 次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ は、展開して $y = ax^2 - 2apx + ap^2 + q$ の形になるので、改めて $-2ap = b$、$ap^2 + q = c$ と書けば、2 次関数の一般形は $y = ax^2 + bx + c$ であるといえる。同様に反比例の関数 $y = \dfrac{\tilde{a}}{x - p} + q$ は、通分して $y = \dfrac{qx + \tilde{a} - pq}{x - p}$ の形になるので、改めて $q = a$、$\tilde{a} - pq = b$ と書けば、反比例関数の一般形は $y = \dfrac{ax + b}{x - p}$ であるといえる。

ここでは、もう一歩踏み込んで $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ の形の関数を**分数関数**と呼ぼう。分数関数と反比例の関数が同等であることを示してみたい。具体的に $y=\dfrac{4x+1}{2x-1}$ を考えよう。この関数は

$$y=\frac{4x+1}{2x-1}=\frac{2(2x-1)+3}{2x-1}=\frac{3}{2x-1}+2=\frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{1}{2}}+2$$

のように変形できる。このことから、$y=\dfrac{\frac{3}{2}}{x}$ を $x$ 軸方向に $\dfrac{1}{2}$、$y$ 軸方向に 2 だけ平行移動すればよい。また、**漸近線**は $x=\dfrac{1}{2}$、$y=2$ である。

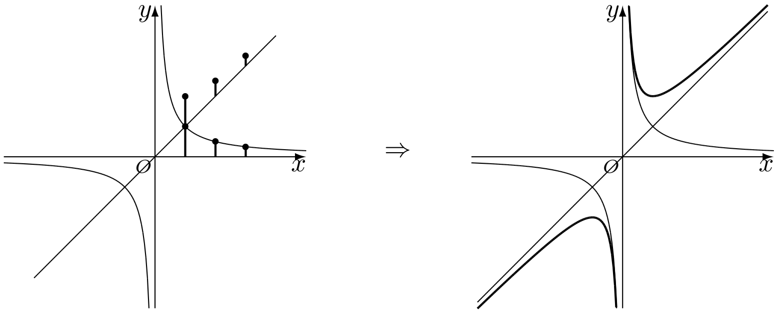



一般に、$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ は $y=\dfrac{\tilde{a}}{x-p}+q$ の形に変形できるので、分数関数は反比例関数と同等なのである。

## 一歩進めて

分数関数という字面の響きから、$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の形の関数はすべて分数関数の範疇ととらえてよいだろう。ただし、ここでは簡単に $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ を考えるに止めておきたい。

まず、$y=\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}$ であるから、$y=x$ と $y=\dfrac{1}{x}$ を合わせた関数であることが分かる。グラフするには、$x$ にいろいろな値を代入してもよいのだが、手作業でも何とかなる範囲である。実際、$y=x$ と $y=\dfrac{1}{x}$ を描いた上で、$y=x$ に $\dfrac{1}{x}$ だけの量を上乗せするように描けばよい。



＊　＊　＊

分母が 1 次式である分数関数は、必ず

$$y=\frac{n\text{ 次式}}{ax+b}=(n-1\text{ 次式})+\frac{(\text{定数})}{ax+b}$$

の形にすることができる。つまり、$n-1$ 次式が表す曲線に、双曲線が上乗せされたグラフになると言える。$x$ の絶対値が大きいほど $\dfrac{(\text{定数})}{ax+b}$ の値は 0 に近くなるので、

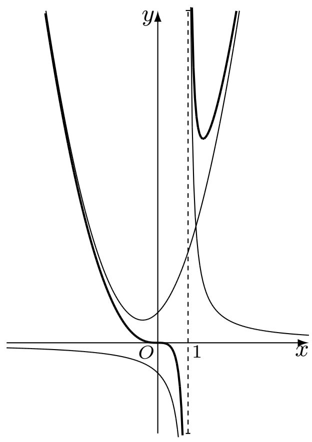
$$n\to\infty\quad\text{のとき、}\quad y=\frac{n\text{ 次式}}{ax+b}\ \to\ y=(n-1\text{ 次式})$$

といってよい。このとき、$n-1$ 次式は分数関数の漸近線となっている。

実際、$y=\dfrac{x^3}{x-1}$ は

$$\begin{aligned}
y &= \frac{x^3}{x-1}\\
&= \frac{(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1}{x-1}\\
&= (x-1)^2+3(x-1)+3+\frac{1}{x-1}\\
&= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}+\frac{1}{x-1}
\end{aligned}$$

であるから、そのグラフは




となるのである。放物線が漸近線になっている様子が分かるだろう。▮