2 次関数と 2 次方程式

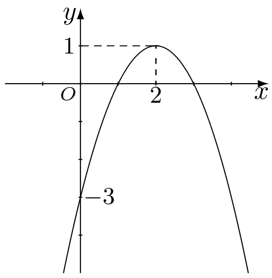
始めに、平方完成式のおさらいを兼ねて

$$y = -x^2 + 4x - 3$$

のグラフを描いてみよう。まず、右辺の平方式を作らなくてはならない。

$$\begin{aligned} y &= -(x^2 - 4x) - 3 && (x\text{ を含む項をまとめた}) \\ &= -(x^2 - 4x + 2^2 - 2^2) - 3 && (\text{平方式を作るため } 2^2 \text{を加減した}) \\ &= -(x^2 - 4x + 2^2) + 2^2 - 3 && (\text{平方式に必要な項だけまとめた}) \\ &= -(x-2)^2 + 1 && (\text{因数分解と整理をした}) \end{aligned}$$

これより、グラフは上に凸の放物線で、頂点が $(2,\ 1)$、y 切片が $(0,\ -3)$ であることが分かる。実際にグラフは



となるであろう。

ところで、$-x^2 + 4x - 3$ のような式を見ると、2 次方程式 $-x^2 + 4x - 3 = 0$ を思い浮かべることがあるかもしれない。2 次関数と 2 次方程式に同じ式が使われているとしたら、そこにはどんな関係があるのだろうか。関数の式と方程式を比べると、違いは “$y =$” であるか、“$= 0$” であるか、でしかない。もう少し突っ込んだ言い方をすれば、関数式の y を 0 に変えたもの—すなわち $y = 0$ としたもの—が方程式なのである。

それは何を意味するのだろう。y を 0 に変えて 2 次方程式を解けば、$x = 1, 3$ であることはすぐ分かる。そして、グラフは x 軸の 1, 3 の位置で交わっている。そう、y を 0 に変えた方程式は、2 次関数のグラフが y 軸と交わる位置を教えてくれるのだ。

しかし、この表現は正確ではないし、2 次方程式は 2 次関数の式の y を 0 に変えたものでもないのである。2 次方程式 $-x^2 + 4x - 3 = 0$ とは、

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 3 & (\text{放物線}) \\ y = 0 & (\text{直線}) \end{cases}$$

の共通解を求めるために、上の連立方程式を解いたことになるのである。したがって、$x = 1, 3$ と同時に、$y = 0, 0$ が分かり、それらの組 $(1,\ 0)$、$(3,\ 0)$ が共通解となって目の前に現れたのである。

2 次不等式を解く

次は 2 次不等式を解いてみよう。先の例と同じ式を用いて

$$-x^2 + 4x - 3 > 0$$

を解くことにする。まず、両辺に -1 を掛ける。その際、不等号の向きが逆になることに注意すると

$$x^2 - 4x + 3 < 0 \quad \text{より} \quad (x-1)(x-3) < 0$$

とできる。積が負になる場合は

$$「x - 1 > 0,\ \text{かつ}\ x - 3 < 0」\quad \text{または}\quad 「x - 1 < 0,\ \text{かつ}\ x - 3 > 0」$$

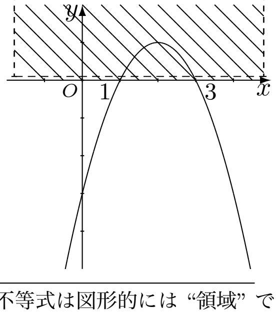
のときであるが、後者はあり得ないので前者の場合—すなわち $1 < x < 3$ —が解となる。これが 2 次関数とどのように関係するのか見ておこう。

2 次関数と 2 次不等式

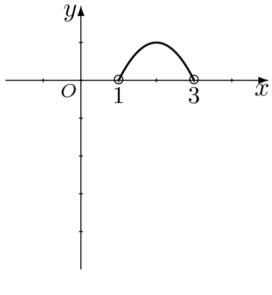
2 次不等式 $-x^2 + 4x - 3 > 0$ は、2 次方程式との関連で指摘したように、単に "$y =$" を "> 0" に変えたのではない。それは、放物線と不等式を連立させた

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 3 & （放物線） \\ y > 0 & （不等式） \end{cases}$$

の共通解なのである[1]。放物線と直線の共通解は点であったが、$y > 0$ との共通解の場合は、放物線の一部を切り取ることになるのである。



$\Rightarrow$



[1]後で述べるが、不等式は図形的には "領域" である。

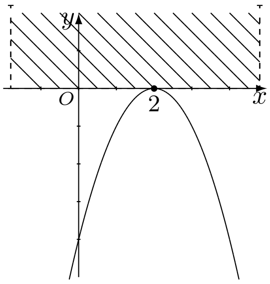
それは、図で示した通り“頭の部分”ということになるのだが、さすがに $1 < x < 3$ 以外の表し方はないであろう。

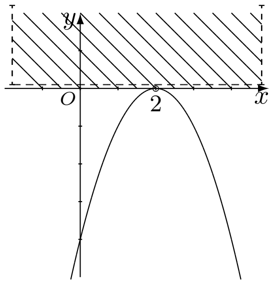
2 次不等式の解

似たような連立式になってしまうが、今度は

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 4 \\ y \geqq 0 \end{cases}$$

を解いてみよう。式を変形しながら解いてもよいのだが、ここは 2 次関数のグラフを描いて解決したい。放物線と $y \geqq 0$ を描くと左図のようになる。





放物線と $y \geqq 0$ の部分には共通解がないように思えるが、ただ 1 点 $(2,\ 0)$ だけが共通していることが分かるだろうか。よって、方程式と不等式の連立解は“頂点”である。しかしこれは $x = 2$ と表すしかないだろう。もし、連立式が

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 4 \\ y > 0 \end{cases}$$

であったらどうだろうか。この場合は右図のようにまったく共通部分がない。よって、“解なし”が解となる。

さて、連立式は 1 つにまとめて書くことができる。いまの 2 例は、それぞれ

$$-x^2 + 4x - 4 \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$
$$-x^2 + 4x - 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{解なし}$$

という結論を得ることができたのであった。そして、このことは一般に

$$\boxed{\begin{array}{l} (x-\alpha)^2 \leqq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \alpha \\ (x-\alpha)^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{解なし} \end{array}}$$

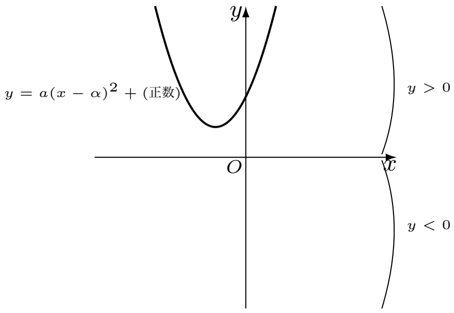
と書くことができるのである。

*　*　*

2 次の方程式と不等式を、2 次関数に関連づけていくらか解いてみた。解法を網羅したわけではないが、方程式・不等式の章で扱った結論と同じであったことと思う。2 次不等式には、

$$\boxed{\begin{array}{lcl} (x-\alpha)^2+(\text{正数})>0 & \Rightarrow & \text{すべての実数} \\ (x-\alpha)^2+(\text{正数})<0 & \Rightarrow & \text{解なし} \end{array}}$$

などがあっただろう。もちろん、これらも 2 次関数のグラフに関連づければ、解の正当性は疑うべくもない。



関数のグラフ $y=a(x-\alpha)^2+(\text{正数})$ に対して、方程式には係数 a はないが、両辺を a で割れば同等であることに注意しよう。この場合、たとえば $a(x-\alpha)^2+(\text{正数})>0$ が表すものは、放物線のすべてである。しかし前に述べたように、それでは方程式の解とは言えないので、x の範囲に見立てて、すべての実数と言うのである。▮