関数 $y = ax^2$

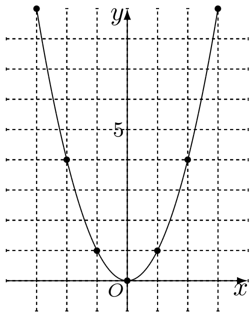
1 次関数の次に 2 次関数考えよう。一般に 2 次関数は

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

であるが、手始めに必要最小限の関数 $y = x^2$ について考えることにする。この関係はもはや比例ではない。関数がどのような変化をするかは、いくつかの値を代入すれば分かる。

x	$\cdots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$	16	9	4	1	0	1	4	9	16	$\cdots$

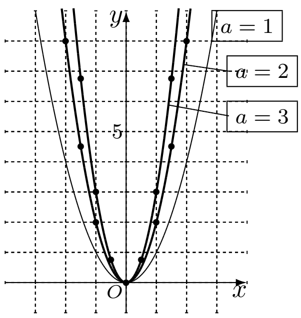
表を見れば、y の値—値域—は負の値をとらないこと、$x = 0$ を中心に左右対称の値をとること、などが分かる。このことを視覚化するには、グラフを描くとよい。

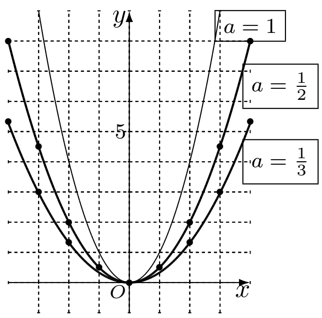


グラフは**放物線**と呼ばれる。読んで字のごとく放った物が描く線であり、実際、投げられた物の軌跡は方程式 $y = ax^2$ を満たすのである。

$y = ax^2$ の性質

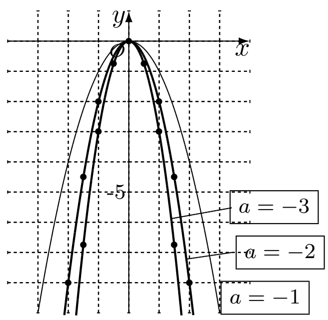
では、a の値の違いによって $y = ax^2$ がどうなるか調べることにする。単純に、$a = 2$、$a = 3$、$\ldots$ の系列と、$a = \frac{1}{2}$、$a = \frac{1}{3}$、$\ldots$ の系列をグラフにしておこう。

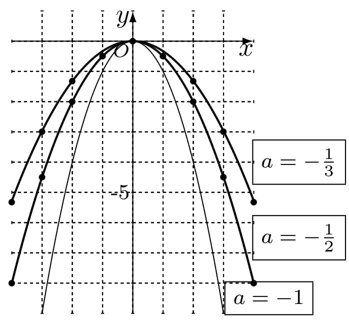




グラフの様子から、$a=4$ や $a=\dfrac{1}{4}$ のときの予想はつくであろう。予想は、a の値が大きいほど放物線の開きが狭い—逆に言えば a の値が小さいほど放物線の開きが広い—であり、実際、予想は正しい。ただ、いまは $a>0$ の場合を考えたに過ぎないので、$a<0$ についても調べるべきだろう。

しかし $a<0$ の場合は、$a>0$ に対する $y=ax^2$ の正負が逆転する以外に変わるところはない。したがってグラフを示せば





となることは容易に分かるはずである。これで、いずれにせよ

$$\boxed{y=ax^2 \text{ のグラフは、} |a| \text{ が大きい（小さい）ほど放物線の開きが狭い（広い）}}$$

と言えるのである。

＊　＊　＊

$y=ax^2$ のグラフの形状を見るのに、Microsoft Excel は少し役に立つ。

◇	A	B	C	D	E	F
1	x	x^2	2x^2			
2	-4	(* B2)	(* C2)			
3	-3	↓下へコピーする	↓下へコピーする			
4	-2	↓	↓			
5	-1	↓	↓			
6	0	↓	↓			
7	1	↓	↓			

※ セルの式
(B2)　=A2^2
(C2)　=2*A2^2

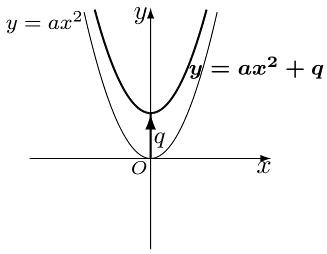
たとえば、$y=x^2$ と $y=2x^2$ のグラフを比較したければ、表のように入力してから A–C 列を範囲選択し、メニューのグラフから「散布図」を選択するとよい。散布図にもいろいろと種類があるが、好みのものを選べばよいだろう。たくさんのグラフを一度に比べたければ、D 列、E 列、. . . にも適当な式を入力するとよい。

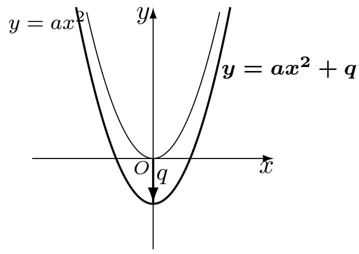
ただし、Excel は気が利いているせいか、軸目盛が期待と違うスケールで描かれることが多い。調整することは可能だが、様子を見ることだと割り切っておこう。▮

関数 $Y = aX^2$

$y = ax^2$ はたしかに 2 次関数の一種であるが、本来 2 次関数とは $y = ax^2 + bx + c$ を指す。これは $y = ax^2$ と $y = bx + c$ を合わせた式であるから、グラフ的には放物線と直線を合わせることになる。放物線と直線を合わせると、どんなグラフになるのだろうか。

それを考える前に、もう少し単純な関数 $y = ax^2 + q$ を取り上げる。これは $y = ax^2$ に定数 q を加えただけの式であるから、y の値は常に ax^2 より q だけ大きい値になることが分かる。このことをグラフ上で見た場合、$q > 0$ であれば放物線が q だけ持ち上げられ、$q < 0$ であれば放物線が c だけ引き下げられるはずである。すなわち

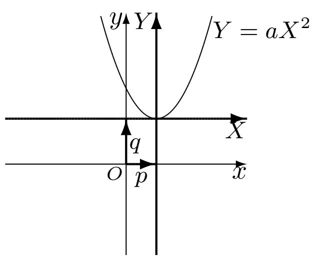


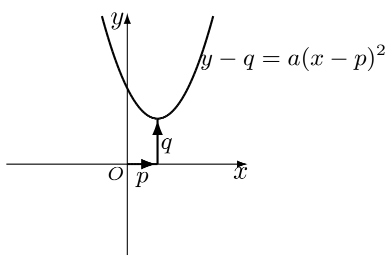


となるであろう。$a < 0$ の場合も同様である。$q > 0$ であれば放物線が q だけ持ち上げられ、$q < 0$ であれば放物線が c だけ引き下げられる。

グラフを描くことだけに注力するならこれでよいが、ここでは仕組みを考えてみたい。仕組みとは $y = ax^2 + q$ を $y - q = ax^2$ と見れば、これは間違いなく $Y = ax^2$ の関係である。すなわち、$y - q$ を Y に見直すことで、y 軸目盛より q だけ差がある Y 軸目盛ができ、$Y = ax^2$ のグラフは Y 軸の原点を通るのである。

さて、このことは大きなヒントである。$y - q$ を Y に見直して y 軸目盛より q だけ差がある Y 軸目盛ができるなら、$x - p$ を X に見直すことで、x 軸目盛より p だけ差がある X 軸目盛ができるはずである。そして、$Y = aX^2$ のグラフは X-Y 座標の原点を通るであろう。





以上のことから、$Y = aX^2$ のグラフは X-Y 座標の原点を通る放物線であるといえる。それは言

い換えれば、$y-q=a(x-p)^2$ のグラフは X-Y 座標の原点、すなわち x-y 座標の $(p,\ q)$ を通るのである。

*　*　*

$y=ax^2+bx+c$ の一部だけ抜き出した $y=ax^2+c$ を考え始めたとき、文字の使い方を $y=ax^2+q$ にしたことで混乱しているかもしれない。しかし、この措置は混乱を防ぐために行っているのである。数学では、同じ文字には同じ値を同時に当てはめる習慣がある。話題の範囲が暗黙のうちに制限される場合は、とくにそうである。

$y=ax^2+c$ の形は $y=ax^2+bx+c$ から一部を抜き出したように見えるが、実際は、$y=ax^2+c$ の形は「放物線 + 定数 の形」であり、$y=ax^2+bx+c$ の形は「放物線 + 直線 の形」なのである。この後で述べるように、

$$（放物線 + 直線）\Rightarrow（放物線 + 定数）$$

とすることができる。ところがこのようにすると、直線 $bx+c$ における定数 c と、（放物線 + 定数）の定数はまったく違う値になってしまう。違う値になることが分かっていながら同じ文字を使うわけにはいかない。そこで、唐突ながら使用する文字を変更したのである。▮

平方完成式

一般的な 2 次式は ax^2+bx+c で表されるので、一般的な 2 次関数は $y=ax^2+bx+c$ の形である。しかし、いま分かったことは、式が $y-q=a(x-p)^2$ の形ならばグラフが容易に描けることであるから、$y=ax^2+bx+c$ は $y-q=a(x-p)^2$ の形であることが望ましい。もちろんそれは簡単にできる。

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式は覚えているだろうか。さらに、公式の導き方も覚えているだろうか。そのときの式変形と同じことをすればよいのである。実際

$$\begin{array}{rcll}
y &=& ax^2+bx+c & \\
y &=& a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x\right)+c & （x\text{ を含む項を整理した}）\\
y &=& a\left\{x^2+\dfrac{b}{a}x+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2-\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2\right\}+c & （\left(\frac{b}{2a}\right)^2\text{ の加減で同値を保った}）\\
y &=& a\left\{x^2+\dfrac{b}{a}x+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2\right\}-a\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2+c & （\text{定数項だけ括弧の外へ出した}）\\
y &=& a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{b^2-4ac}{4a} & （\text{平方式を作り通分した}）\\
y-\dfrac{b^2-4ac}{4a} &=& a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 & （\text{定数項を移項した}）
\end{array}$$

であるから、$x+\dfrac{b}{2a}=X$、$y-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=Y$ と置けば、この変形で $Y=aX^2$ ができたことになる。したがって、どんな 2 次関数の式でも X-Y 座標の原点を通る放物線とみなすことができるのである。

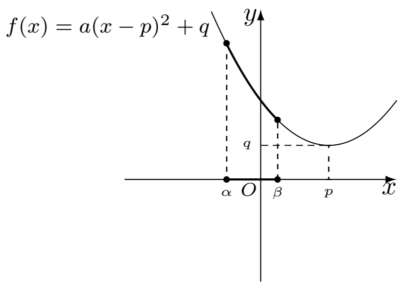
ここで、$-\dfrac{b}{2a}=p$、$\dfrac{b^2-4ac}{4a}=q$ とおくと、$Y=aX^2$ は $y-q=a(x-p)^2$ であるから

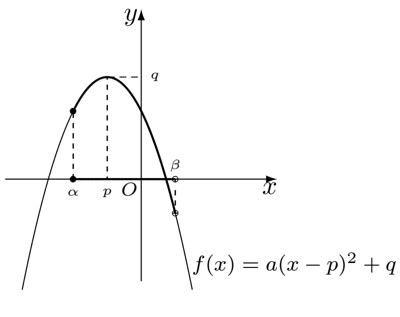
> $y=(x-p)^2+q$ のグラフは、
> $y=ax^2$ を x 軸方向に p、y 軸方向に q だけ平行移動したグラフである

といえる。

2 次関数の最大・最小

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ は、平方完成式を作ることで $y=ax^2$ がどの程度平行移動されるかが分かった。2 次関数の平行移動とは、突き詰めれば頂点がどこに移ったかということでもある。頂点の位置さえ分かれば、a の正負でグラフの凹凸が、c の値で y 切片の位置が分かるので、それでほぼ 2 次関数のグラフは特徴づけられてしまう。その上で変域が指定されるなら、値域が分かり、したがって最大値・最小値も分かるというものである。





最大値・最小値について、モデル的な図で説明してみよう。左図において、x の区間 $[\alpha,\ \beta]$ における最大値と最小値であるが、ここは単調に減少していることがグラフから分かる。指定された区間の中で、$f(x)$ がいちばん大きい値をとるところが最大値であり、いちばん小さい値をとるところが最小値である。よって、

$$x=\alpha\text{のとき、最大値 } f(\alpha)$$
$$x=\beta\text{のとき、最小値 } f(\beta)$$

であるといえる。

一方、右図は x の区間 $[\alpha,\ \beta)$ における最大値と最小値である。この区間は単調に増加または減少しているわけではないので、注意が必要である。グラフより、頂点において最大値をとっているので

$$x = p \text{ のとき、最大値 } f(p) = q$$

である。また、最小値は端点 $(\beta,\ f(\beta))$ のようであるが、ここは指定された区間内の点ではない。したがって、最小値はその手前になろうが、それは特定することができないので、最小値は “なし” ということになる。