直線の方程式

$y = mx + k$ は、傾き m、y 切片 k の直線を表すが、2 点を与えても 1 つの直線を特定することができる。たとえば 2 点を $(x_1,\ y_1)$、$(x_2,\ y_2)$ としてみよう。これより傾き m が

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

で表されるので、y 切片を k とすれば、直線の方程式は $y = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + k$（※）と書き直せる。しかし、$k$ の値が分かっているわけではないので、それを特定するために $(x,\ y) = (x_1,\ y_1)$ を代入して k を求めることにすると

$$y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1 + k \quad \text{より} \quad k = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1$$

であるから、この k を（※）へ戻して

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1$$

を得る。y_1 を左辺に移項すれば、右辺は共通の $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ をくくり出すことができて

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

になる。はじめに $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ であったから、この式は

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

と書いても同じことである。それぞれ、2 点 $(x_1,\ y_1)$、$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式、1 点 $(x_1,\ y_1)$ を通る傾き m の直線の方程式として、覚えておくとよいだろう。

直線の平行条件

2 つの直線が平行であるときを考えよう。直線が平行であるためには、直線の傾きが等しくなければならない。2 つの直線 l_1、l_2 の式をそれぞれ

$$l_1 \ :\ y = m_1x + k_1、\qquad l_2 \ :\ y = m_2x + k_2$$

とした場合、直線が平行である条件は、傾きが等しいことより

$$\boxed{m_1 = m_2}$$

である。このとき、もし $k_1 = k_2$ であれば、2 つの直線は実は同じものであるから、平行というわけではない。ただし、ここでは 2 つの直線が一致した場合も広い意味で平行であるとしておこう。

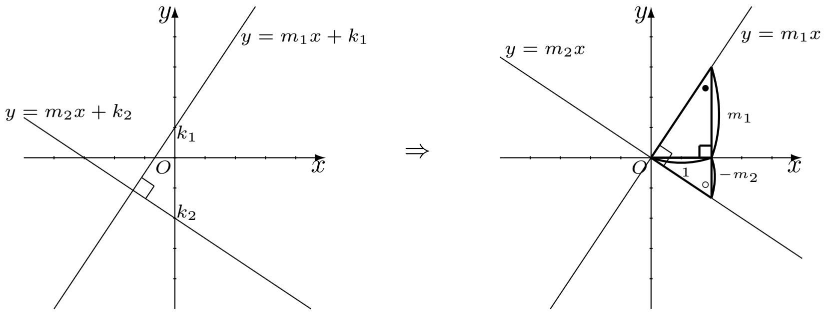
直線の垂直条件

2 直線が平行である場合より、垂直であることの方が重要である。それは、たとえば点と直線の距離は点から直線に下ろした垂線の長さであるから、距離の測定には垂直条件が必要になるからである。

いま、垂直に交わる 2 直線

$$y = m_1x + k_1、\qquad y = m_2x + k_2$$

を考える。2 直線が平行のときの m_1 と m_2 の関係を調べたように、この場合も m_1 と m_2 の関係を調べたい。ここで m_1 と m_2 の関係は y 切片に無関係であることに注意すると、2 直線の交点が原点になるように平行移動しておくと考えやすい。



そこで、原点で交わる 2 直線 $y = m_1x$ と $y = m_2x$ に向けて、$x = 1$ から x 軸に垂直な線を引くと、x 軸を挟んで上下に 2 個の直角三角形ができることが分かる。2 直線の式に $x = 1$ を代入して、直角三角形の高さはそれぞれ m_1 と $-m_2$ を得る。$-m_2$ というのは、この図はたまたま傾き $m_2 < 0$ であるから、直角三角形の辺の長さを正の値にするため $-m_2$ としている。

さて、2 つの直角三角形は相似である。相似な図形の対応する辺の比は等しいことから

$$1 : m_1 = -m_2 : 1 \quad より \quad -m_1m_2 = 1$$

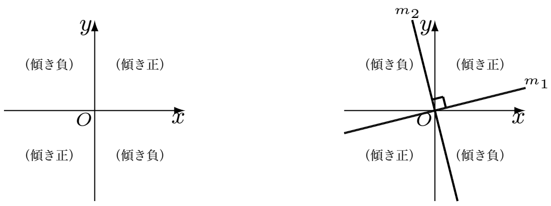
が成り立つ。両辺に -1 を掛けて、2 直線が垂直であるときは

$$\boxed{m_1m_2 = -1}$$

が成り立つことが分かった。ただし、2 つの直線が x 軸と y 軸に平行なときも互いに垂直であるが、この場合は、y 軸に平行な直線の傾きが定義できない。したがって、このような場合は除外して考えなくてはならない。

* * *

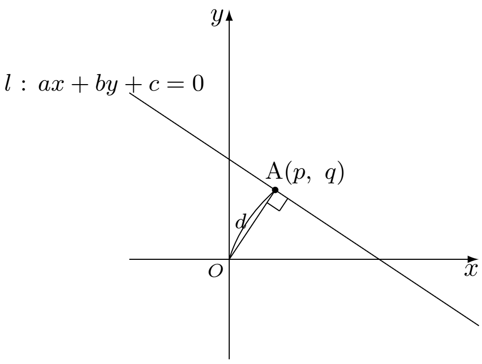
傾き m_1 と m_2 について、たまたま図の中で $m_2 < 0$ であったため、$-m_2$ を直角三角形の辺の長さにした。これでは、一般的な考察をしたことにならないように見えるが、実際はそうではない。



原点を通る直線は、第 1 象限–第 3 象限を通れば傾きは正、第 2 象限–第 4 象限を通れば傾きは負であることに注意しよう。そして垂直に交わる 2 直線は、一方が第 1 象限–第 3 象限を通れば他方は第 2 象限–第 4 象限を通る。このことから、2 直線の傾き m_1 と m_2 は、一方が正なら他方は負なのである。したがって、m_1, m_2 の正負に関わらず $m_1m_2 = (負)$ が言えることになる。▮

原点と直線の距離

2 点間の距離を測ることは、2 点を結ぶ線分の長さを求めることである。これは、2 点を結ぶあらゆる線の中で最小の長さになる。つまり、距離とは最短距離のことを言うのである。では点と直線の距離、すなわち点と直線の最短距離はどのように測ればよいだろうか。それは、点から直線へ垂線を下ろせばよい。これが、点から直線へ届くあらゆる線の中で最小の長さになる。手始めに、原点 O と直線 $l:\ ax + by + c = 0$ との距離、すなわち O から l に下ろした垂線の長さ d を求めることにしよう。



垂線の足の座標を $\mathrm{A}(p,\ q)$ とおくと、A は直線 l 上の点であるから、$(x,\ y) = (p,\ q)$ を代入して

$$ap + bq + c = 0 \quad \ldots (1)$$

が成り立つ。さて、直線 l は式を書き直せば $y=-\dfrac{a}{b}x-c$ であるから、l の傾きは $-\dfrac{a}{b}$、また、線分 OA の傾きは見ての通り $\dfrac{q}{p}$ である。l と OA は垂直なので、先の垂直条件より

$$-\frac{a}{b}\cdot\frac{q}{p}=-1 \quad\Rightarrow\quad q=\frac{bp}{a}\ \ldots(2)$$

となることが分かる。(2) を (1) へ代入して p を計算すると

$$\begin{aligned} ap+b\left(\frac{bp}{a}\right)+c &= 0 \\ a^2p+b^2p+ac &= 0 && \text{(両辺に } a \text{ を掛けた)} \\ (a^2+b^2)p &= -ac && \text{(} ac \text{ を移項して } p \text{ をくくり出した)} \\ p &= \frac{-ac}{a^2+b^2} && \text{(両辺を } a^2+b^2 \text{で割った)} \end{aligned}$$

となる。これを (2) へ代入すると

$$q=\frac{-bc}{a^2+b^2}$$

がすぐ分かる。

ところで OA の長さ d は、三平方の定理から $\sqrt{p^2+q^2}$ であるから、ここにいま求めたばかりの p、q を代入すると

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\left(\frac{-ac}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{-bc}{a^2+b^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2c^2+b^2c^2}{(a^2+b^2)^2}} && \text{(2 乗して通分した)} \\ &= \sqrt{\frac{(a^2+b^2)c^2}{(a^2+b^2)^2}} && \text{(分子を因数分解した)} \\ &= \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} && \text{(約分して}\sqrt{\ }\text{をはずした)} \end{aligned}$$

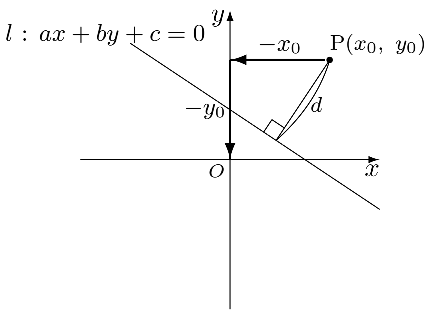
のように式が簡単になる。これは公式として使いやすいので、覚えておきたいものである。すなわち

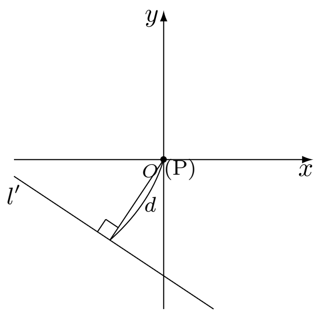
$$\boxed{\text{原点 } O \text{ と直線 } ax+by+c=0 \text{ の距離は } \quad \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

である。蛇足ながら分子が $|c|$ であるのは、文字式の計算の章で扱ったように $\sqrt{c^2}=|c|$ だからである。

任意の点と直線の距離

原点 O と直線の距離を求めることはできても、任意の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ と直線の距離が求められなくては実用的ではない。





ところが、任意の点と直線の距離は以外と楽に求められる。それは、任意の点を、その点の分だけ平行移動して原点に移してしまえばよい。すると P は原点 O と同一視できるので、結果的に原点と直線 l' の交点を求めればよいからだ。

すると問題は、l を平行移動した直線の式を知りたいのであるが、$\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ が $O(0,\ 0)$ になるわけなので、直線上のすべての点も x 方向に $-x_0$、y 方向に $-y_0$ だけの移動をする。すなわち

$$l'\ :\ a(x+x_0)+b(y+y_0)+c=0 \qquad \Rightarrow \qquad l'\ :\ ax+by+(ax_0+by_0+c)=0$$

である。話が前後してしまったが、x 方向に $-x_0$ の移動が $x-(-x_0)=x+x_0$ であることは、この後明らかになることである。

したがって原点と直線 l' の距離は、先に求めた公式に当てはめて

$$\boxed{\text{点 } (x_0,\ y_0) \text{ と直線 } ax+by+c=0 \text{ の距離は } \quad \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

であることが分かるのである。