写像と関数

少し気取って、難しい話から入ることにしよう。2 つの**集合** X、Y を考える。集合とは、簡単に言ってものの集まりである。X と Y は同じ集合であってもかまわないのだが、ここでは違うものを考えることにし、集合 X は住所の集まり、集合 Y は郵便番号の集まりであるとしよう。このとき、X の 1 つの**要素**に対して Y の 1 つの要素が対応している。たとえば、X の要素 “札幌市中央区大通東” に対して Y の要素 “060-0041” が対応している。

X		Y
札幌市中央区東大通東	$\longleftrightarrow$	060-0041
大阪市港区海岸通	$\longleftrightarrow$	552-0022
福岡県太宰府市三条	$\longleftrightarrow$	818-0111
$\vdots$	$\longleftrightarrow$	$\vdots$

住所に対して郵便番号を決めるためには何らかの規則がなければならないし、実際この例にも明確な規則が存在している（はずである—一般の人には見えないだけで）。このような、対応の規則を**写像**と呼ぶ。写像にあたる規則はいつも簡単に表現できるとは限らないので、写像は文字 f、g などで表し

$$f : X \longrightarrow Y$$

のように書く。この書き方は、f という規則が集合 X から集合 Y への道筋を与えているように見えるかもしれない。一方で先の例のように、具体的に 1 つ 1 つの要素の対応を表したいこともある。そのようなときは、X の要素を x、Y の要素を y で表して

$$y = f(x)$$

と書く。$\longrightarrow$ が $=$ になっているのは、集合間で考える写像は何かぼんやりした印象を与えるのに対し、要素間で考える写像ははっきりした形をとるからであろう。したがって

$$f(\text{札幌市中央区東大通東}) = \text{060-0041}$$

という書き方ができることになる。

しかし、この例は数学の対象としては少々扱いにくい。そこで、写像を考える中でとくに X、Y が数の集合のとき、写像 f を**関数** f と呼ぶことにする。もし集合 X の n 行めに書かれた住所を数

値 n で、集合 Y の番号から “-” を取り除いた数字の列を 7 桁以下の整数で表せば、先の例は

$$f(1) = 600041, \quad f(2) = 5520022, \quad f(3) = 8180111, \quad \ldots$$

となって、このときの f は関数になる。ただし、f を計算式にするのは難しいことに違いない。

と、このように小難しい話で始めたが、実際は x に何らかの数値やものを与えたとき、y に 1 つの数値やものが返ってくるものが関数だと思っていてもさほど的外れではないし、ことさら写像と関数を区別しなくとも、いまのところは大丈夫である。

関数の例

実数の集合 X と実数の集合 Y を考え、$X \longrightarrow Y$ への対応 f を、“X の要素 x を 2 倍する” ことに決めたとする。すると Y の要素 y について関数 $y = f(x)$ が定義されたことになるが、y は x を 2 倍したものだから、具体的に

$$y = 2x$$

という関係式が成り立つ。つまり $f(x) = 2x$ ということで、言葉を添えれば

$$\begin{array}{cccc} \text{規則 } f & x\text{ の} & \text{は} & 2 \times x \\ f & (x) & = & 2x \end{array}$$

なのである[1]。

ここで、x と y の対応を表にすれば

x	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	2.7	3	$\frac{10}{3}$	4	$\cdots$
y	$\cdots$	-4	-2	0	2	4	5.4	6	$\frac{20}{3}$	8	$\cdots$

のような表になるだろう。x の値が整数でなくとも y の値は常にその 2 倍であるから、x と y は**正比例**の関係にあるといえる。

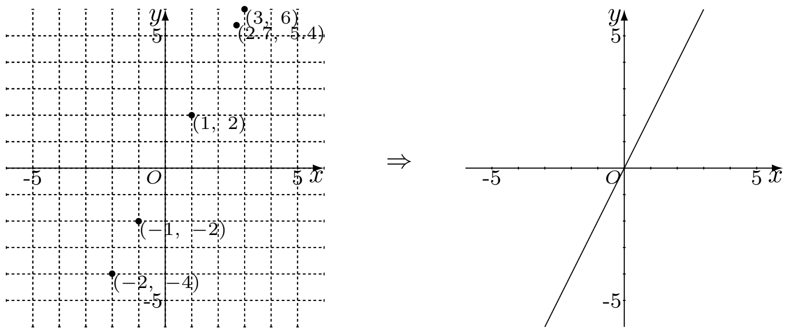
正比例の関係をグラフに表すことにしよう。まず、準備として表の x, y を組にして

$$(x\ , y) = (-2,\ -4),\ (-1,\ -2),\ (0,\ 0),\ (1,\ 2),\ (2.7,\ 5.4),\ (3,\ 6),\ \ldots$$

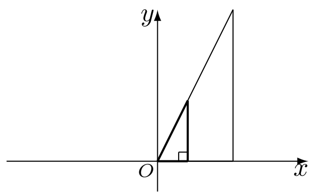
としておく。つまり、x, y の数値の組が 1 つの**座標**である。このとき、x の数値を x 座標、y の数値を y 座標という。

[1] “$f(x)$” は英語読みなら “$f\ of\ x$” なので、文字の並び順としては正しい。日本語読みなら、おそらく “$x\ f$” と書いただろうか。

これらの座標を、**$\boldsymbol{x}$ 軸**を横軸、**$\boldsymbol{y}$ 軸**を縦軸にもつ x-y 座標平面に記すには、x 座標を x 軸の目盛として、y 座標を y 軸の目盛として読み、目盛の交差した位置が記すべき点になる。x 軸と y 軸は、互いに目盛 0 が垂直に交差するように描くのがふつうで、座標 $(0,\ 0)$ は**原点**と呼ばれ、O で表している。軸が直交するので、**直交座標**ということもある。



さて、表から得られた座標を x-y 平面に記してみると、点は直線状に並んでいることが分かる。このことから $y=2x$ の関係は、原点を通る直線になると結論づけてもよいのだが、もう少し理屈っぽく述べておこう。



x と y の比の値が一定であるというのは、x を底辺、y を高さとする直角三角形を 1 つ与えて、それと相似な三角形の集合を考えていることになる。そのような三角形の斜辺はすべて重なっているので、比例関係にあるグラフ上の点は斜辺の上、すなわち一直線上にあることになる。一般に

$$\boxed{y=mx \quad (m\neq 0)}$$

で与えられる関数が正比例で、正比例のグラフは原点 O を通る直線になっている。$m=0$ であっても正比例になっているのだが、その場合は、結局のところ x が消えてしまって、見かけ上 x と y の関係ということがはっきりしなくなってしまうので、$m\neq 0$ を条件に加えたのである。

1 次関数

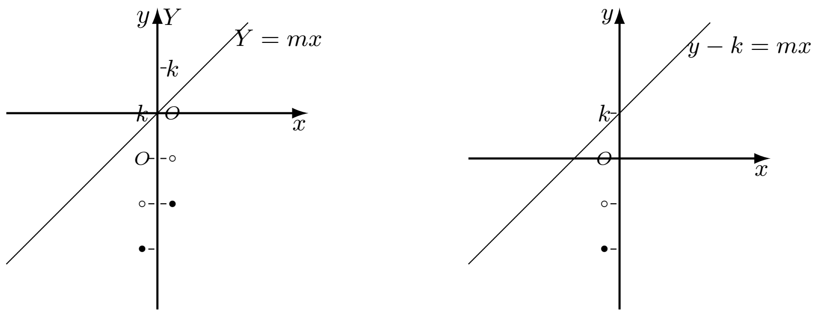
正比例の関数を一歩進めて

$$\boxed{y = mx + k}$$

とすると **1 次関数**になる。これは正比例ではないことに注意しよう。それは、たとえば $x = 1$ と $x = 2$ に対応する y の値を調べれば明らかである。

x	1	$\xrightarrow{\text{2 倍}}$	2
y	a	$\xrightarrow{\text{2 倍ではない}}$	$2a + b$

ただし k を移項した式 $y - k = mx$ は、x と $y - k$ が正比例の関係にある。それは、同じように具体的な x の数値を代入してもよいのだが、$y - k = Y$ とおけば $Y = mx$ だから、Y と x が正比例の関係にあることは、式の上からも明らかである。ただ、$y - k = Y$ としたことで、グラフの様子がつかみづらくなったかもしれない。



$y - k = Y$ ということは、y 軸目盛より常に k 小さい値が Y 軸目盛になることである。つまり、y 軸目盛の k は Y 軸目盛では 0 となり、見かけ上、y 軸を k だけずらした軸が Y 軸となっている。正比例のグラフは原点 O を通る直線であるから、Y 軸目盛の O を通る直線が $Y = mx$ のグラフである。

しかし Y 軸は便宜的に目盛を付けた軸であるから、正しく y 軸目盛を使えば、$Y = mx$ は y 軸目盛の k を通っている。それが x-y 平面に描かれた $y - k = mx$ のグラフ—すなわち $y = mx + k$ のグラフ—である。y 軸を横切るこの場所は **y 切片**と呼ばれる。また、$y = mx + k$ は正比例ではないものの、関数が変化していく割合は $y = mx$ の比 m に等しい。m は**直線の傾き**と呼ばれる。以上のことから、

$$\boxed{y = mx + k \text{ のグラフは、} y \text{ 切片 } k \text{ を通る、傾き } m \text{ の直線である}}$$

ということができる。

*　　*　　*

ふつう、直線の式というと $y = ax + b$ の形で表されることが多い。数学においては、$a, b, c, \ldots$ を定数に、$\ldots, x, y, z$ を変数に使う習慣が根付いている。直線の式では変数を x, y にしているのだから、定数は a, b か

ら使い始めるのが自然である。ではあるが、あえて直線の式を $y = mx + k$ としているのは理由がある。a, b などは別のタイプの式に使いたいからである。中学校などでは、直線の式にいろいろなタイプを持ち出さないので、$y = ax + b$ でもかまわない。しかし、ここではいくつかの式が混在するので、区別のために違う文字にしたのである。

それなら、別のタイプの式に m, n などを使えばよさそうに思うかもしれない。実際そうであり、文字の使い方は教科書によって違っているから、どうでもよいことである。ここで m を用いたのは、比の表し方 $m : n$ に使われやすい文字であるからで、k を用いたのは、定数に使われやすい文字だからである。k が定数に使われやすいのは、Konstant（constant のドイツ語）からの連想であろうか。▮