恒等式

未知数が特定の値のときのみ成立する等式を方程式と呼んだが、未知数がどんな値であっても成り立つ等式が恒等式と呼ばれることはすでに述べたと思う。当たり前に見えるだろうが

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \quad (※)$$

は展開公式であり、どんな a、b の値に対しても等式は成り立つ。これは恒等式である。公式だから当然なのではなく、恒等式であるから公式として採用されているわけである。

等式が分数式であっても恒等式として成立するものはあるが、ここでは n 次の**整式**—つまり多項式—について考えてみよう。まず x の整式について

$$\boxed{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \quad\Longleftrightarrow\quad a_0=a_1=\cdots=a_n=0}$$

が成り立つ。

$\Leftarrow$ については、x の係数がすべて 0 であるなら、整式の値も 0 になることは自明であろう。

$\Rightarrow$ については連立方程式の解について考えるとよいだろう。恒等式はどんな x の値に対しても成り立つので、無限の x の値に対して

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

が成り立つことになる。このことは、$n+1$ 個の未知数 $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ に対して、無限の係数の組み合わせの連立方程式が出来上がるのだが、それを成り立たせるのは $a_0=a_1=\cdots=a_n=0$ しかない。

そして上の事実から、

$$\boxed{\begin{array}{c} a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m \\ \Longleftrightarrow\quad n=m\ \text{かつ同じ次数の係数が等しい} \end{array}}$$

ことも言える。それは、右辺を左辺に移項した式—ここでは $n>m$ とした—

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+(a_k-b_0)x^{n-k}+\cdots(a_{n-1}-b_{m-1})x+(a_n-b_m)=0$$

を考えればよい。

さて、ややこしい話になっているが、結局のところ恒等式であることを確認すために必要なことは、等式の左辺と右辺の次数が同じで、かつ同類項の係数が等しいかどうかである。※ が恒等式であることは、左辺を展開した $a^2+2ab+b^2$ が右辺に合致しているからに他ならない。

等式の証明

恒等式は常に成り立つ等式である。公式として利用されている恒等式が正しいことは、比較的簡単な計算で示すことができるのだが、恒等式の中には一見しただけでは正しいことが分からないものも数多くある。その場合は、等式が正しいことを証明する必要があるので、ここでは証明方法について述べることにしよう。

$A = B$ を示したいときは一般に、A を変形して B になることを確認したり、$A - B = 0$ を示すことが多い。そのような方法でうまくいかないときは、A から X を導き、B からも X を導くことで、間接的に $A = B$ を示してもよい。

また等式には、ある条件の下で成り立つものがある。たとえば

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{ならば} \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

という条件付きの恒等式がある。実際、$a = 2$、$b = 3$、$c = 4$、$d = 6$ などとして代入してみると、等式が正しいことが分かる。なぜ正しいかを証明するには、条件を利用する。

このようなときは $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = k$ と置くのがよい。そうすると

$$a = bk\text{、}\quad c = dk$$

であるから、それぞれ代入して

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{bk+dk}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k$$
$$\frac{a-c}{b-d} = \frac{bk-dk}{b-d} = \frac{k(b-d)}{b-d} = k$$

となるから、間接的に等式が等しいことが分かった。

また、

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \quad \text{ならば} \quad \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^3 \qquad (☆)$$

などは、整った形の等式であろう。これも実際に値を代入してみればよいのだが、あまり勝手な数を代入してもうまくいかなはずである。試行錯誤で代入するなら、たとえば $a = 3$ としたら $b = -3$ にしないとうまくないことが見えてくるに違いない。

等式がどのような仕組みであるか調べてみよう。まず、条件である分数の分母を払うために、両辺に $abc(a+b+c)$ を掛けると、条件は

$$(bc + ca + ab)(a + b + c) = abc$$

となる。これは少々面倒な計算になるが、abc を左辺に移項して

$$\begin{aligned}(bc+ca+ab)(a+b+c)-abc &= 0\\ \{(b+c)a+bc\}\{a+(b+c)\}-abc &= 0\\ (b+c)a^2+(b+c)^2a+(b+c)bc &= 0\\ (b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\} &= 0\\ (b+c)(c+a)(a+b) &= 0\end{aligned}$$

と変形できるので、結局のところ条件は、$b=-c$ または $c=-a$ または $a=-b$ である。つまり、この条件のどれか— $b=-c$ としよう—が与えられたなら、☆が言っていることは

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b-b} \quad ならば \quad \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{(-b)^3}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{b}\right)^3$$

であり、実は「$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{a}$ ならば $\dfrac{1}{a^3}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^3$ である」と言っているに等しい。見た目は美しい等式かもしれないが、ちょっとしたごまかしを含んだ等式といえよう。

不等式の証明

不等式 $A>B$ のような関係を証明する一番簡単な方法は、$A-B>0$ を示すことである。しかし、一方に根号が含まれていたりすると、単純に $A-B$ を計算することができない。もし、$A>B\geqq 0$ のような状況であれば、$A^2>B^2$ を示してもかまわないし、$A^2-B^2>0$ を示してもかまわない。

では、ある式が 0 以上であることはどのように保証されるであろうか。もっとも確実なものは、ある式の形が

$$(\text{実数})^2 \quad や \quad (\text{実数})^2+(\text{正の値})$$

のように変形できればよい。

たとえば、

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab} \ (ただし\ a,\ b\geqq 0)$$

が成り立つことを証明してみよう。左辺は**相加平均**と呼ばれ、右辺は**相乗平均**と呼ばれている。いずれも平均値を求めるひとつの方法である。証明は (左辺) − (右辺) $\geqq 0$ を示すことにすれば、$a, b \geqq 0$ であるから、以下のようになるだろう。

$$(\text{左辺})-(\text{右辺}) \quad = \quad \frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}(a+b-2\sqrt{ab}) \\
&= \frac{1}{2}\{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2\} \\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0\ .
\end{aligned}
$$

平均値といえば何も 2 つの値の平均を求めるだけでなく、もっとたくさんの平均をとるのが一般的だろう。数学的には n 個の平均ということになろう。相加平均は全部を足して n で割ればよいことは日常でも目にしている。相乗平均はいつでも平方根を求めるのではなく、n 個の相乗平均なら全部を掛けて n 乗根をとることになる。一般的な形で書けば、相加平均と相乗平均の間には常に

$$
\boxed{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}
$$

の関係が成り立っている。

コーシー・シュワルツの不等式

よく知られた不等式のひとつにコーシー・シュワルツ[1]の不等式と呼ばれるものがあり、その 2 項分のものは

$$
(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2
$$

である。証明は簡単で

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= (a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2) - (a^2x^2+2abxy+b^2y^2) \\
&= a^2y^2+b^2x^2-2abxy \\
&= (ay-bx)^2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

でお終いである。不等式の形がきれいなことと、扱いやすさから様々な問題に利用されている。

実際のコーシー・シュワルツの不等式は、n 項のもので

$$
\boxed{(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2) \geqq (a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2}
$$

である。

[1] オーギュスタン=ルイ・コーシー（1789–1857）：フランスの数学者。ヘルマン・アマンドゥス・シュワルツ（1843–1921）：ドイツの数学者。