# 分数方程式

分数方程式とは、未知数が分数の分子・分母に含まれるような方程式である。簡単な例をあげれば

$$\frac{2x}{x^2-1}=\frac{x-1}{x+1}-1$$

などがそうである。このような方程式は分母を払ってしまえば普通の方程式になる。そこで $x^2-1$ を両辺に掛けると、$x^2-1=(x+1)(x-1)$ に注意して

$$2x=(x-1)^2-(x^2-1) \quad \text{より} \quad x=\frac{1}{4}$$

ということがすぐに分かる。ここでは式を整理すると 1 次方程式になったので、至極簡単に解けたのだが、分母を払ったときにたとえば 4 次方程式になってしまっては困るであろう。

$$\frac{x+1}{x^2}-\frac{2x^2}{x+1}=-1$$

においては、分母を払うと

$$(x+1)^2-2x^4=-x^2(x+1) \quad \text{より} \quad 2x^4-x^3-2x^2-2x-1=0$$

であるから、うまく因数分解できない限り解きようがない。実際は 4 次方程式にも解の公式はあるのだが、それは大変な手間である。

実はこの方程式は工夫次第でうまく解けるようにできていて、それは $\dfrac{x^2}{x+1}=y$ と置いてみると

$$y-\frac{2}{y}=-1 \quad \text{より} \quad y^2+y-2=0$$

であるから、$(y+2)(y-1)=0$ として $y=-2,1$ がすぐに分かるのである。そこで $y$ を $x$ の式に戻して

$$\frac{x^2}{x+1}=-2 \quad \text{または} \quad \frac{x^2}{x+1}=1$$

の分母を払った

$$x^2=-2(x+1) \quad \text{または} \quad x^2=x+1$$

を解の公式を用いて解けば、1 番目の方程式には解がないが、2 番目の方程式から

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

を求めることができるのである。

＊　＊　＊

2 次方程式の解の公式の他に、3、4 次方程式の公式に言及したが、5 次以上の代数方程式に解の公式がないことは知られている。それはアーベル[1]が証明した。勘違いしては困るのだが、“公式がない” ということは “解を求める明確な手続き” が ’ ないのであって、決して解を求められないのではない。

実際 5 次以上の方程式であっても、因数分解できるものもあるし、置き換えの工夫によって次数が下げられるものもある。さらに、コンピュータを使えば代数方程式を解くことは容易である。

ところで 3、4 次方程式には、2 次方程式の解の公式ほど簡単ではないが、きちんとした公式が存在している。公式の使い方もやや面倒なので、詳しく知りたい場合は、適切な文献をあたるのがよいだろう。∎

## 分数不等式

分数不等式は、分数方程式の等号が不等号に変わっただけの話である。しかし、これは分母を払うときに注意を要する。なぜなら、不等式の両辺に負の値を掛けると不等号の向きが変わってしまうので、分母を払うときはその正負に注意をしなければならないからである。それを避けたいと思えば、$(\text{分母})^2$ を掛ければ間違いないが、これでは次数が高くなってしまうので別の問題が生じる可能性が高い。

ここでは、そういうことではなく、別の形の不等式を考えよう。それは $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$（または $< 0$）の形をした分数不等式である。これは分母を払って $f(x) > 0$ や $f(x) < 0$ とするのではなく

$$\boxed{\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \ (\text{または} < 0) \iff f(x)g(x) > 0 \ (\text{または} < 0)}$$

であることを利用して解くとよい。この場合の分数不等式は、要するに符号の問題なので、符号だけを考えれば商の形でも積の形でも同じことなのである。

この性質から、たとえば

$$\frac{6}{x+1} \leqq 4 - x$$

を解くならば

$$\frac{6}{x+1} - (4 - x) \leqq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1} \leqq 0 \quad \Rightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{x+1} \leqq 0$$

より $(x+1)(x-1)(x-2) \leqq 0$ を解けばよいことになる。その解は $x < -1,\ 1 \leqq x \leqq 2$ である。1 番目の解が $x \leqq -1$ でないのは、もともとの不等式の分母に $x + 1$ があり、$x = -1$ が解の範囲に含まれると分母が 0 になるので除外していることに注意されたい。

[1] ニールス・アーベル（1802–1829）：ノルウェーの数学者。

## 無理方程式

方程式に無理式が含まれれば、それは無理方程式と呼ばれる。$n$ 乗根が任意の次数で含まれていると、方程式を解くことは大変困難になってしまうので、ここでは単に根号が使われた方程式を扱うにとどめておこう。

たとえば

$$X=\sqrt{Y} \quad (※)$$

という方程式は、当然のことながら根号内は $Y \geqq 0$ でなければならない。実際に方程式を解く場合は、両辺を 2 乗して

$$X^2=Y \quad (☆)$$

を解けばよい。この式は左辺が平方形であるから、右辺も自動的に $Y \geqq 0$ となっているので、方程式を解く際の注意は必要ないように思えたら、それは間違いである。もとの方程式は※であった。※は左辺が自動的に $X \geqq 0$ であるから、☆には $X \geqq 0$ という条件があることを忘れてはならない。

簡単な無理方程式

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}=1$$

を解いてみよう。このまま両辺を 2 乗する前に $-\sqrt{3-x}$ を右辺へ移項して

$$\sqrt{x+2}=1+\sqrt{3-x} \quad \text{を 2 乗して整理した} \quad x-1=\sqrt{3-x}$$

をもう一度 2 乗するのがよいだろう。ただし、この時点で $x \geqq 1$ であることに注意しなくてはならない。さて、両辺をもう一度 2 乗して整理すると $x^2-x-2=0$ となって、$(x-2)(x+1)=0$ より $x=2,\,-1$ を得る。しかし $x \geqq 1$ であったので、$x=2$ だけを解とすることになる。

## 無理不等式

無理方程式の等号を不等号に変えれば無理不等式となる。無理不等式の基本的な型には

$$\begin{aligned} f(x) &> \sqrt{g(x)} \quad \text{(a)} \\ f(x) &< \sqrt{g(x)} \quad \text{(b)} \end{aligned}$$

がある。不等号の向きが違うだけのようであるが、解き方には多少の違いがある。

いずれの場合も根号内は 0 以上でなくてはならないので、

$$\boxed{g(x) \geqq 0}$$

は必要な条件となる。また実際に解く際は、両辺を平方した形が計算しやすいので

$$\boxed{\begin{array}{ll} \{f(x)\}^2 > g(x) & (\mathrm{a}') \\ \{f(x)\}^2 < g(x) & (\mathrm{b}') \end{array}}$$

を解くことになるだろう。以上は (a)、(b) の不等式を解くための共通した条件である。

共通でない条件も考えよう。(a) の $f(x)$ は $\sqrt{g(x)}$ より大きいので自動的に $f(x) > 0$ となるが、(b) は $\sqrt{g(x)}$ より小さいので $f(x) < 0$ も考えてよいことになる。しかし $f(x) < 0$ であれば、$\sqrt{g(x)} \geqq 0$ であることは確実なので、(b) は必ず成り立っている。単純に考えれば、$f(x) < 0$ の範囲が分かれば (b) が解けたことになるであろうが、実際は $f(x) < 0$ である $x$ が $g(x) \geqq 0$ を満たす保証はないのである。したがって (b) を解く際には、(a) を解くときに考えた条件の他に、

$$\boxed{f(x) < 0 \quad \text{かつ} \quad g(x) \geqq 0}$$

を付け加えなくてはならないのである。

そのような無理不等式の例として

$$x + 1 < \sqrt{9 - x^2}$$

を解いてみたい。まず、根号内は 0 以上の値でなければならないので

$$9 - x^2 \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad -(x+3)(x-3) \geqq 0 \quad \text{より} \quad -3 \leqq x \leqq 3 \ \ldots (1)$$

である。このとき、$x+1$ は確実に $\sqrt{9-x^2}$ より小さいのだが、$x+1 < 0$ の範囲—すなわち $x < -1$ —が (1) を満たさなくてはならないので、結局

$$-3 \leqq x \leqq -1 \ \ldots (1')$$

が範囲の 1 つである。

いまは $x + 1 < 0$ に関しての解であるから、次に $x + 1 \geqq 0$ に関しての解を求めよう。この場合は不等式の両辺がともに 0 以上であるから、始めの不等式を両辺を 2 乗した

$$(x+1)^2 < 9 - x^2$$

を解けばよい。展開して整理した $x^2 + 2x - 4 < 0$ に解の公式を当てはめれば、$\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} < x < \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$ が得られる。これは $x + 1 \geqq 0$ —すなわち $x \geqq -1$ —のもとで考えているので

$$-1 \leqq x < \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \ \ldots (2)$$

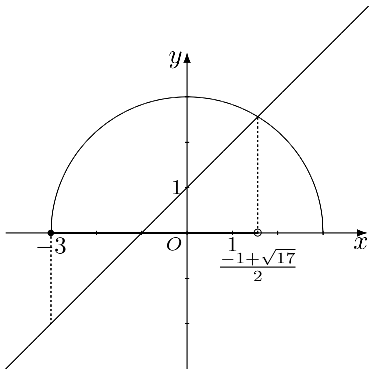
となる。

(1′)、(2) より最終的に求める範囲は

$$-3 \leqq x < \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

である。

このことをグラフで確認しておこう。不等式にある $x+1$ がとる値を $y$ とすると、それは直線 $y = x+1$ である。同じく $\sqrt{9-x^2}$ がとる値を $y$ とすると、それは $y = \sqrt{9-x^2}$ であるが、両辺を 2 乗して整理すると円 $x^2+y^2 = 9$ であることが分かる。ただし、再び $y$ について解けば $y = \pm\sqrt{9-x^2}$ であるが、もとの式は正の方だけなので、例の無理不等式にあった式は円の上半分だけを表していることになる。




そして実際にグラフの様子を見ると、たしかに $-3 \leqq x < \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$ の範囲で、直線が半円の下側にあることが分かるのである。