高次方程式

x を未知数とする方程式は一般に

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

という形で書かれるが、だいたい $n \geqq 3$ である方程式を**高次方程式**と呼んでいる。当然、次数が高いほど方程式を解くことが難しくなり、簡単な公式もない。よく知られているように、3 次方程式と 4 次方程式には解の公式—一定のアルゴリズムで解ける手順—が存在するが、5 次以上の方程式には、そのような手続きが存在しない。

しかし、ここで 3 次方程式の公式を導くわけにもいかないので、典型的な高次の方程式の解法について見ることにしよう。まず、何次の方程式であっても、1 次もしくは 2 次の因数だけの因数分解ができれば、その方程式は解けたことになる。なぜなら、1 次の因数は直接、2 次の因数は解の公式から、それぞれ簡単に解が得られるからである。はじめはそのような例から扱ってみよう。

たとえば 3 次方程式 $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$ は、$(x+1)(x+2)(x+3) = 0$ に因数分解できるので、解は $x = -1,\ -2,\ -3$ である。因数分解が正しいことは展開してもとの方程式に一致することから分かるのだが、問題はもとの方程式をどのようにして因数分解するか、であろう。

因数定理

最初に次の事実を確認しておこう。

> $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ としたとき、
> $f(x) = 0$ が $x = \alpha$ を解に持てば、$f(x)$ は $(x - \alpha)$ を因数に持つ。

因数定理と呼ばれるこの定理は、$f(\alpha) = 0$ ならば

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = (x - \alpha) \cdot g(x)$$

であることを意味している。$x = \alpha$ を代入すれば、左辺と右辺はともに 0 になるからである。

$x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ が $x + 1$ を因数に持つことは、$x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ に $x = -1$ を代入して 0 になることから分かる。そこで $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1) \cdot g(x)$ であるのだが、実際に $g(x)$ を求めるときはどうすればよいだろうか。

ひとつの方法は、小学校で習う筆算による割り算のように、x の次数に着目しながら筆算をする方法である。これは

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & +5x & +6 & \\ \cline{2-5}
x+1 \ ) & x^3 & +6x^2 & +11x & +6 \\
 & x^3 & +x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & 5x^2 & +11x & \\
 & & 5x^2 & +5x & \\ \cline{3-5}
 & & & 6x & +6 \\
 & & & 6x & +6 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

のように行われる。しかし、ここではより簡便な**組立除法**と呼ばれる方法で割り算をしてみよう。

組立除法

具体的に $(x^3+6x^2+11x+6)\div(x+1)$ を例として示すことにする。組立除法に必要なものは、割られる式の係数と $(x-\alpha)$ の α の値であるから、それを書き出しておく。とくに因数 α は鍵になる数なので、係数の横に線で区切って書いてある。また先頭の係数だけは、あらかじめ線の下へ書いておく。

$$
\begin{array}{cccc|c}
1 & 6 & 11 & 6 & -1 \\ \cline{5-5}
\downarrow & & & & \\ \hline
1 & & & &
\end{array}
$$

ここまでの準備が整ったら、あとは決まったルーティンを繰り返すだけである。決まったルーティンとは、「線の下へ書かれた数と α —この例では -1 —を掛けて、それを次の係数の下に書き和を線の下へ書く」である。これを繰り返すことで、割り切れる場合には最後の数は 0 となる。

$$
\begin{array}{cccc|c}
1 & 6 & 11 & 6 & -1 \\ \cline{5-5}
 & \mathbf{-1} & & & \\ \cline{1-4}
1 & \mathbf{5} & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc|c}
1 & 6 & 11 & 6 & -1 \\ \cline{5-5}
 & -1 & \mathbf{-5} & & \\ \cline{1-4}
1 & 5 & \mathbf{6} & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc|c}
1 & 6 & 11 & 6 & -1 \\ \cline{5-5}
 & -1 & -5 & \mathbf{-6} & \\ \cline{1-4}
1 & 5 & 6 & \boxed{\mathbf{0}} &
\end{array}
$$

0 の手前に並んだ数が商の係数で、いまは 3 次式を 1 次式で割っているので、係数 1, 5, 6 は順に x^2, x の係数、および定数項となって、x^2+5x+6 が分かるのである。

* * *

組立除法がうまく機能する理由を述べておこう。証明ということではなく、例のように 3 次式 ax^3+bx^2+cx+d を $x-k$ で割ることを想定しておく。すると、組立除法が行ったことは以下のようになるはずである。

$$
\begin{array}{cccc|c}
a & b & c & d & k \\ \cline{5-5}
 & ak & mk & nk & \\ \cline{1-4}
a & m & n & \boxed{0} &
\end{array}
$$

ただし、筆算中の式が煩雑になるのを避けるため

$$m = b + ak, \quad n = c + mk, \quad 0 = d + nk \quad （※）$$

と置いたことに注意されたい。この場合、商は $ax^2 + mx + n$ であるから

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - k)(ax^2 + mx + n)$$

が成り立っている。実際、右辺を展開すると

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 + (m - ak)x^2 + (n - mk)x - nk$$

であるから、係数どうしを比較して、間違いなく※の関係になっていることが分かるのである。▮

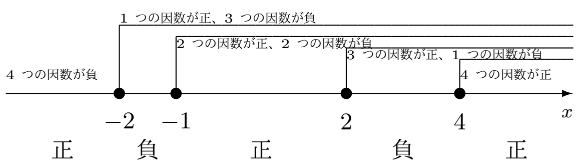
高次不等式

高次方程式の等号が不等号に変われば、それは高次不等式である。高次不等式も因数分解ができれば、解を求めるのはそれほど難しいことではない。具体的に 6 次不等式が

$$(x + 2)(x + 1)(x - 2)(x - 3)^2(x - 4) \geqq 0 \quad （☆）$$

のように因数分解できたとしよう。この場合、因数 $(x - 3)^2$ は必ず 0 以上の値であるから、不等式の正負を決めるのは $(x + 2)(x + 1)(x - 2)(x - 4)$ の部分である。

さて、この部分には $x = -2, -1, 2, 4$ の零点がある。つまり、式の値がちょうど 0 になる x の値が 4 個あることが分かる。もし x の値がいちばん大きな零点である 4 より大きければ、すべての因数は正の値となるので、それらの積も正の値である。しかし、x の値が 4 より小さく次に大きな零点である 2 より大きければ、$(x - 4)$ は負で $(x - 4)$ 以外の因数はすべて正の値となる。したがって、それらの積は負の値である。さらに、x の値が 2 より小さく -1 より大きい場合を考えると、それらの積は正の値である。さらに、. . . 以下同様である。



このことは因数の積を考えた場合、正負が交互になっていることを意味している。したがって☆の解は、数直線の範囲で値が正になるところを見ればよい。よって

$$x \leqq -2, \quad -1 \leqq x \leqq 2, \quad x \geqq 4$$

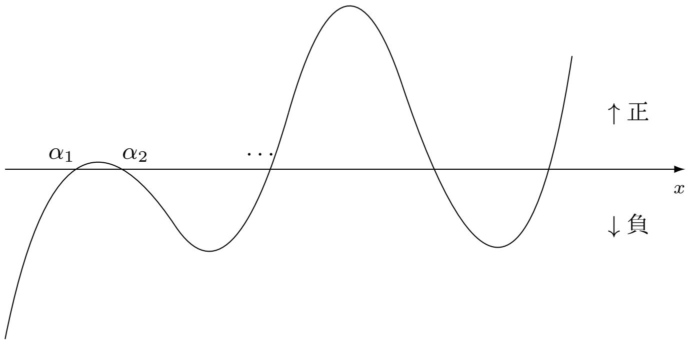
が求める解であることが分かる。

高次不等式と関数のグラフ

高次不等式と高次関数には、2 次不等式と 2 次関数がそうであったように、深い関係がある。たとえば高次関数 $y=f(x)$ が $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n$ のような実数値を用いて

$$y=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

のように因数分解できたものとする。$f(x)=0$ の解は $x=\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ であるから、$y=f(x)$ は n 個の零点をもち、x 軸と n 箇所で交わっている。いま考えている関数が連続関数であるなら、関数のグラフは零点を横切りながら波打つように描かれるはずである。



高次不等式を解くことは、このグラフが x 軸の上にある範囲と下にある範囲を求めることに他ならない。したがって、$f(x)>0$ の解に $\alpha_1<x<\alpha_2$ が含まれることが、グラフを見て分かるのである。

*　　*　　*

高次不等式の解の範囲がグラフから読み取れる場合は、あくまでも不等式が因数分解できたり、または 2 次方程式程度の解の公式から x 軸との交点の値が分かるときに限る。そうでなければ、単に x 軸との交点が α_1,α_2 であるとして、$\alpha_1<x<\alpha_2$ とする以外にない。

実際に α_1 などの値を特定するには、たとえば**ニュートン法**で求めたりするのである。ニュートン法はとくにコンピュータを使わずとも、**微分**の知識が少しあれば利用できる。試しに $ax^2+bx+c=0$ の解を Microsoft Excel を用いてニュートン法で求める見本を示しておこう。

◇	A	B	C	D	E	F
1	係数 a ↓	係数 b ↓	係数 c ↓			
2	1	0	-2			
3						
4	x の解は…	1				
5		（* B5）				
6		↓下へコピーする				
7		↓				
8		↓				

※ セルの式
（B5）　=(A2*B4*B4-B2*B4-C2)/(2*A2*B4)

見本は $x^2-2=0$ の解を $x=1$ 付近で見つけるものである。A2, B2, C2 セルにそれぞれの係数の値を与えて、B4 セルに**解の付近の値**を入力する。その上で B5 セルの式をコピーすると、値が一定の数に収束していく様子が分かるだろう。収束値が求める解である。これで解が求められる理屈は別の機会に譲るが、ニュートン法はその性質上、正しい解に近い値から始めないとうまくないのである。

近頃は数学の問題をコンピュータで解くことも増えたものだが、この見本もコンピュータが問題を解いているわけではない。本当は、蓄積された数学の知識で人が問題を解決しているのであって、コンピュータは人からの指示を受けているだけなのである。コンピュータが自ら問題を解けるようになるのは当分先の未来か、または、永久にそんな時代が来ないか、どちらであろうか。▮