2 次不等式

一般に、2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$（$a \neq 0$）の等号を不等号に変えた式を 2 次不等式という。1 次不等式と同じく使われる不等号は “$<$”、“$>$”、“$\leqq$”、“$\geqq$” であるが、解き方まで同じわけではない。解き方を考えるために、2 次不等式 $ax^2+bx+c<0$ を例にとってみよう。

不等式であっても、2 次式 ax^2+bx+c は場合によって因数分解できるので、$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ になったとする。このとき 2 次不等式には

$$ax^2+bx+c<0 \quad \Longleftrightarrow \quad a(x-\alpha)(x-\beta)<0$$

という関係が成立している。不等式は方程式と違い、数の積が 0 になるときだけを調べるのではなく、0 より大きいとか小さいとかを調べなくてはならない。たとえばいま例にとっている不等式は、a、$(x-\alpha)$、$(x-\beta)$ の 3 つの数の積が負の値になることを示している。3 つの数の積が負になる場合は、$(+,\ +,\ -)$、$(+,\ -,\ +)$、$(-,\ +,\ +)$、$(-,\ -,\ -)$ の 4 通りがある。しかし、それらをすべて調べるのは骨が折れるので、a が定数であることを利用して、あらかじめ両辺を a で割っておくとよいだろう。すなわち不等式は

$$(x-\alpha)(x-\beta) \quad ? \quad 0$$

を解くことと同じである。?の部分は、a の正負によって不等号の向きが変わるので、$<$ か $>$ のいずれかになる。ここでは、両方とも考察の対象にしよう。

$$\begin{aligned} (x-\alpha)(x-\beta) \quad &< \quad 0 \quad \text{(a)} \\ (x-\alpha)(x-\beta) \quad &> \quad 0 \quad \text{(b)} \end{aligned}$$

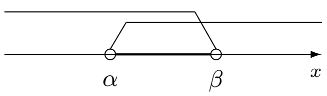
まず (a) は、2 数の積が負の値であることを示している。この場合は、$(+,\ -)$ か $(-,\ +)$ のいずれかであるので

$$x-\alpha>0,\ x-\beta<0 \quad \text{または} \quad x-\alpha<0,\ x-\beta>0$$

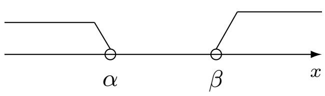
すなわち

$$x>\alpha,\ x<\beta \quad \text{または} \quad x<\alpha,\ x>\beta$$

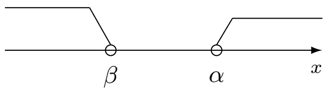
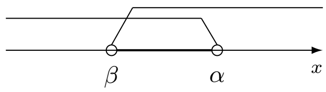
がいえる。この様子は α、β の大小関係によって変わってくるが、$\alpha<\beta$ ならば



または



であり、$\alpha>\beta$ ならば

 または 

である。図から、一方は共通する解の範囲があるが、もう一方は共通する解の範囲がない。ところで “または” の用法は、どちらか一方が成立すればよいので、いずれの場合でも解は $\alpha < x < \beta$ か $\beta < x < \alpha$ であるといえる。ここで、α, β のうち大きい方を [大]、小さい方を [小] と書くことにすれば、これらはただひとつの書き方—[小] $< x <$ [大]—で済ますことができる。

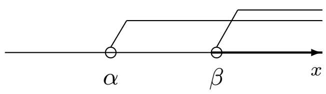
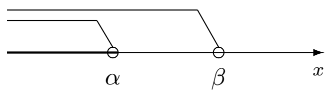
(b) は、2 数の積が正の値であることを示している。この場合は、$(+,\ +)$ か $(-,\ -)$ のいずれかであるので

$$x - \alpha > 0,\ x - \beta > 0 \quad \text{または} \quad x - \alpha < 0,\ x - \beta < 0$$

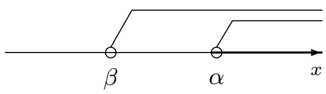
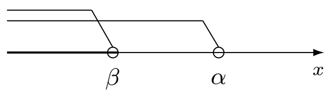
すなわち

$$x > \alpha,\ x > \beta \quad \text{または} \quad x < \alpha,\ x < \beta$$

がいえる。この様子も α、β の大小関係によって変わってくるが、$\alpha < \beta$ ならば

 または 

であり、$\alpha > \beta$ ならば

 または 

である。図はいずれの場合も共通する解の範囲を持ち、上図からは $\alpha < \beta$ ならば $x > \beta, x < \alpha$ で、下図からは $\alpha > \beta$ ならば $x > \alpha,\ x < \beta$ であることが分かる。ここでも、α, β のうち大きい方を [大]、小さい方を [小] と書くことにすれば、これらはただひとつの書き方— $x >$ [大], $x <$ [小]—で済ますことができる。

したがって 2 次不等式の解は、不等号の向きによって解の範囲が異なることが分かった。

$\alpha < \beta$ のとき、$(x - \alpha)(x - \beta) < 0$ の解
$\boldsymbol{\alpha < x < \beta}$
$\alpha < \beta$ のとき、$(x - \alpha)(x - \beta) > 0$ の解
$\boldsymbol{x < \alpha,\ x > \beta}$

*　*　*

方程式や不等式の解の書き方は、一般に x を左辺に書く習慣がある。なぜなら解とは、「x は何々に等しい」や「x は何々より大きい」などの文章が数式化したものであるからである。ところが $\alpha < x < \beta$ は、おそらく文章とは書き方が違うであろうことは、x の範囲を言葉で表現してみれば分かるだろう。この記述は、言葉

よりむしろ数直線上の x の範囲に対応した書き方になっている。そう考えると、$x < \alpha$, $x > \beta$ は言葉の表現であり、数直線上の x の範囲に対応した書き方に合わせるなら、$\boldsymbol{x < \alpha}$, $\boldsymbol{\beta < x}$ と書くのが望ましいのかもしれない。▌

特殊な 2 次不等式

これまでに見てきた 2 次不等式は、不等号に = がない不等式であった。不等式には ≦、≧ を使うこともあるのだが、その場合は = 付き不等号を用いるだけで、他に変わることがないことはすぐに分かる。

しかし、2 次不等式が因数分解できた場合、2 次式が $(x-\alpha)^2$ の形になることもあるだろう。すなわち 2 次不等式が

$$(x-\alpha)^2 < 0 \quad \text{(c)}$$
$$(x-\alpha)^2 > 0 \quad \text{(d)}$$

となる場合である。このときは少し別の見方が必要になる。

(c) を考える。(c) はある数の平方が負の値になることを示しているのだが、実数は平方して負の値になることはないので、(c) を満たす x は存在しない。したがって

$$\boxed{(x-\alpha)^2 < 0 \text{ の解は、} \textbf{解なし}}$$

である。逆に、(d) はある数の平方が正の値になることを示してる。実数は 0 を除いて平方すると必ず正の値になるので、(d) を満たす x はいくらでも存在する。唯一、$x = \alpha$ のときだけ不等式を満たさない。したがって (d) のような不等式は

$$\boxed{(x-\alpha)^2 > 0 \text{ の解は、} \boldsymbol{x = \alpha} \textbf{ 以外の実数}}$$

である。

不等号に = が含まれると少し状況が変わる。つまり 2 次不等式が

$$(x-\alpha)^2 \leqq 0 \quad \text{(e)}$$
$$(x-\alpha)^2 \geqq 0 \quad \text{(f)}$$

となる場合である。

(e) はある数の平方が負の値になることを示しているのだが、ここでは不等号に = があることから、唯一、$x = \alpha$ だけが不等式を満たす。したがって (e) のような不等式は

$$\boxed{(x-\alpha)^2 \leqq 0 \text{ の解は、} \boldsymbol{x = \alpha}}$$

である。不等式でありながら、等式で解が求まるところが面白い。(f) はある数の平方が正の値になることを示しているが、ここでは 0 も含めているので、あらゆる実数が不等式を満たす。したがって (f) のような不等式は

$$\boxed{(x-\alpha)^2 \geqq 0 \text{ の解は、} \boldsymbol{x} \textbf{ はすべての実数}}$$

である。

2 次不等式と 2 次関数

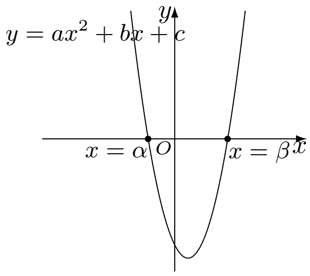
さて、2 次不等式は値の正負に注目することで解けることが分かった。ところで 2 次式 ax^2+bx+c は、不等号とともに扱えば 2 次不等式であるが、$y = ax^2+bx+c$ のように扱えば 2 次関数となる。するとたとえば 2 次不等式 $ax^2+bx+c < 0$ は、$y < 0$ と読み替えてもよいだろう。では、2 次関数において $y < 0$ とは何を指すのだろうか。

もし $y = 0$ ということであれば、それは $ax^2+bx+c = 0$ であるから、$y = 0$ を満たす x は 2 次方程式の解になる。

$$ax^2+bx+c = 0$$

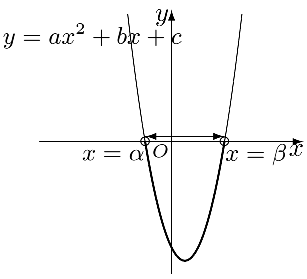
$$\Downarrow \text{解}$$

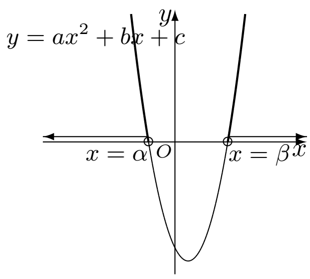
$$x = \alpha, \beta$$



このことを 2 次関数のグラフと比較して見ると、ちょうど放物線が x 軸と交わる点の座標が $x = \alpha$ と $x = \beta$ であることが分かる。つまり、$ax^2+bx+c = 0$ を満たす x を求めることと、$y = ax^2+bx+c$ のグラフの x 座標の値を求めることが同じであることを意味している。

同じように考えれば、$ax^2+bx+c < 0$ を満たす x を求めることは、$y = ax^2+bx+c$ のグラフの $y < 0$ を満たす x 座標の値を求めることでもある。

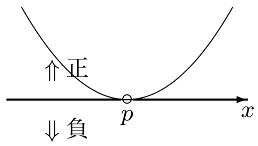


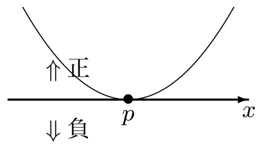


2 次関数のグラフの $y < 0$ の部分とは、左図の放物線において太線で示したところである。このグラフは x 座標の $x = \alpha$ から $x = \beta$ までの範囲を占めているので、$y < 0$ を満たす x 座標とは、$\longleftrightarrow$ で示された $\alpha < x < \beta$ のことである。

また、$y > 0$ の部分とは、右図の放物線において太線で示したところである。このグラフは x 座標の $x = \alpha$ の左側と $x = \beta$ の右側に分かれているので、$y > 0$ を満たす x 座標とは、$\longleftarrow$ または $\longrightarrow$ で示された $x < \alpha,\ x > \beta$ のことである。以上はたしかに、先の結果と一致している。

特別な解になってしまった 2 次不等式 (c), (d), (e), (f) についても同じことがいえる。



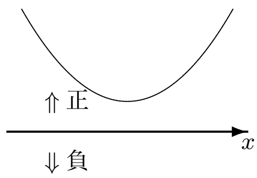


2 次関数のグラフを見て、$y > 0$ や $y \leqq 0$ になる x の範囲を探してみれば、いずれも先の結果に一致することが分かるはずである。

特殊な解になってしまう 2 次方程式は他にも

$$(x-p)^2 + (\text{正の値}) > 0 \quad \text{または} \quad (x-p)^2 + (\text{正の値}) \geqq 0$$
$$(x-p)^2 + (\text{正の値}) < 0 \quad \text{または} \quad (x-p)^2 + (\text{正の値}) \leqq 0$$

のようなものがある。



これらはいずれも関数 $y = (x-p)^2 + (\text{正の値})$ を考えるとよい。グラフは x 軸から離れて描かれているので、$y > 0$ や $y \geqq 0$ ならばグラフは条件を完全に満たしている。逆に $y < 0$ や $y \leqq 0$ ならばグラフは条件を完全に満たしていない。このことから

$(x-p)^2 + (\text{正の値}) > 0$（または $\geqq 0$）の解は、**x はすべての実数**
$(x-p)^2 + (\text{正の値}) < 0$（または $\leqq 0$）の解は、**解なし**

であることが分かるはずである。