判別式

2 次方程式は因数分解や解の公式を用いることで確実に解けることが分かった。しかし、因数分解できないときに解の公式を使うと、少し困った事態が生じることがあるだろう。たとえば 2 次方程式

$$x^2 + x + 1 = 0$$

は因数分解できないので、解の公式を使うことになるのだが、

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

となってしまう。これを解と認めてもよいのだが、$\sqrt{-3}$ という書き方は、2 乗すると -3 になる数を意味するので、実際そのような数はない。したがって、このような場合は解がないものとして扱うべきであろう。

このような状況になるかどうかは、結局のところ解の公式中にある $\sqrt{\ }$ 内の式 $b^2 - 4ac$ が鍵である。$b^2 - 4ac$ が負にならない限り解が求められるので、この式は解の存在を判別する式であるともいえる。そこで $b^2 - 4ac$ を**判別式**（*Discriminant*）と呼ぶことにし、略号 D で表すことにしよう。すなわち $D = b^2 - 4ac$ である。

判別式は正確な解の値を求めることはできないが、解の様子を知ることができる。いまの例から $D < 0$ なら解は存在しないことが分かる。また、$D \geqq 0$ なら解は存在するが、とくに $D = 0$ の場合は解に $\pm\sqrt{0}$ が含まれることから、実際は 1 つの解しか現れない。具体的には $x^2 + 2x + 1 = 0$ を解いた場合で、解の公式より $x = -1$ が分かる。しかし因数分解で解けば分かるように、これは $(x + 1)^2 = 0$ であるから、$x = -1$ が 2 重になっていると見ることもできる。このことから $D = 0$ の場合はとくに、**重解**が存在すると言っている。すなわち

$D > 0$	異なる 2 つの実数解が存在する
$D = 0$	重解が存在する
$D < 0$	解は存在しない

となっている。

* * *

2 次方程式の x の係数が偶数のときは、解の公式として

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

が与えられたことを思い出してほしい。この場合、解の存在を示すのは $\sqrt{\ }$ 内の $b'^2 - ac$ であるから、これもまた判別式と呼べるであろう。一般の判別式に略号が D で、こちらは b の代わりに b' が使われているので、判別式の略号は D' とするのが自然だろうか。すなわち $D' = b'^2 - ac$ である。

ところが、好んで使われる略号は $D/4$ である。もちろん、それには理由がある。$ax^2+2b'x+c=0$ に判別式 D を用いると、

$$D=(2b')^2-4ac=4b'^2-4ac=4(b'^2-ac)$$

であるから、たしかに $b'^2-ac=\dfrac{D}{4}$ になっている。数学の記号や記述は様々であるが、背景を知らないと不思議に見えるものがあることに気をつけたい。∎

解と係数の関係 I

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が因数分解できて $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ になったとすれば、解は $x=\alpha,\beta$ である。一方で $ax^2+bx+c=0$ を解の公式を用いて解くと、解は $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ である。ここでは、b^2-4ac を D と置いたことに注意しょう。

すると因数分解から求めた解 α、β は、解の公式から得られた $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ のいずれかである。ここで $\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ の値を計算してみよう。和と積については、解の公式から得た x のどちらが α でも結果に変わりないので、$+$ のほうを α の値としておこう。

さて、計算をすると

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

であることが分かる。解の和でも解の積でも、その値は 2 次方程式の係数に使われた値だけであることに注意してもらいたい。これは、2 次方程式の解が具体的に分からなくても、解の和や解の積の値が具体的に求められることを意味している。

解の値がはっきり分かれば価値があるのに、解の和や解の積が分かったところで大した意味はないと思うかもしれない。しかし、方程式の解を続けて何かに使うときなどには便利である。

たとえば $x^2+x-3=0$ の解 α,β が、引き続き $\alpha^2+\beta^2$ の計算に使われることを想定してみよう。この場合、方程式の解は $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ であるから

$$\alpha^2+\beta^2=\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)^2+\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)^2$$

を計算しなくてはならない。これは少々面倒である。

しかし、$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{1}{1}=-1$、$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}=\dfrac{-3}{1}=-3$ をあらかじめ求めておけば

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\cdot(-3)=7$$

であることがすぐに分かる。少々あざとい例ではあるが、$\alpha+\beta$ や $\alpha\beta$ は基本対称式であるから、個々の値に頼らず計算ができることは重要なことなのである。このような関係は**解と係数の関係**と呼ばれる。

$$\boxed{\begin{array}{c} ax^2+bx+c=0 \text{ の解を } \alpha\text{、}\beta \text{ とすると} \\ \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}\text{、}\quad \alpha\beta=\dfrac{c}{a} \end{array}}$$

解と係数の関係 II

もう一度、解と係数の関係を書き出してみよう。ただし、分母の a を払った形に直してある。

$$\begin{array}{rclcrcll} \alpha+\beta &=& -\dfrac{b}{a} & \Longrightarrow & -a(\alpha+\beta) &=& b & \ldots(1) \\ \alpha\beta &=& \dfrac{c}{a} & \Longrightarrow & a\alpha\beta &=& c & \ldots(2) \end{array}$$

ところで判別式 D は b^2-4ac であったので、上の (1) から b を、(2) から c を判別式に代入してみると

$$\begin{aligned} D &= \{-a(\alpha+\beta)\}^2-4a\cdot a\alpha\beta \\ &= a^2(\alpha+\beta)^2-4a^2\alpha\beta \\ &= a^2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\} \\ &= a^2(\alpha-\beta)^2 \end{aligned}$$

のように変形できることが分かる。これも判別式である。よって、2 次方程式が実数解を持つのか持たないのかを判別できる。ところが式は a^2 と $(\alpha-\beta)^2$ から成っているので D の値は必ず $D \geqq 0$ になってしまい、$D<0$ にならないと思うかもしれない。しかし実際は $D<0$ となることがあるので、何か見落としているはずである。

見落としを発見するために、たとえば 2 次方程式

$$x^2+x+1=0$$

を考えてみよう。解と係数の関係から $\alpha+\beta=-1$、$\alpha\beta=1$ であることが分かる。では、判別式はというと、$D=-3$ である。判別式からは解がないことが示されているのだが、解と係数の関係からは解があるような雰囲気がある。ここにすれ違いがあるようだ。

実は、解と係数の関係によって解の和と解の積の値が求められているのだから、この 2 次方程式の解は何らかの値であるに違いない。しかし、その解は判別式 $D=a^2(\alpha-\beta)^2$ に当てはめると負

の値になるものである。それは 2 乗すると負の値になるので実数ではないが、方程式の解なのである。何とも妙なことであるが、それは**虚数**と呼ばれ、別の機会に登場する数なのである。

* * *

判別式 $D = b^2 - 4ac$ というのは、2 次方程式を解く過程で考えたものであるが、数学的に (解の差)^2 をもって判別式としている。それは、判別するものが違うからである。単に 2 次方程式が実数解を持つかどうかというのであれば、なにも判別式を使わずとも、解の公式で解いてしまえばよい。解ければ実数解を持ち、解けなければ実数解を持たないだけの話だからである。

(解の差)^2 による解の判別は、重解の有無を知りたいからである。これは、2 次方程式に限った話でなく、もっと高次の方程式にも当てはまる考えである。ここで詳しいことは述べられないが、数学では目的によって使う道具が変わることはよくあるのである。▮