2 次方程式

一般に、等式の右辺をすべて左辺へ移項して $ax^2+bx+c=0$（$a \neq 0$）の形になるものを 2 次方程式という。$a \neq 0$ を示しておかないと、x^2 の項が消えてしまい 1 次方程式と同等になるのだが、広義には a が 0 かどうかに関わらず、ax^2+bx+c を 2 次式と考えるようである。ただし、ここでいう 2 次方程式は常に $a \neq 0$ であるとしておこう。

さて、2 次式 ax^2+bx+c は場合によっては因数分解できることがある。かりに $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ になったとしよう。すると 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ と同じことになる。ところで 2 数の積が 0 になるときは少なくとも一方の数が 0 でなくてはならない。つまり

$$\boxed{AB=0 \iff A=0 \text{ または } B=0}$$

ということである。この事実と、$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ が $a \neq 0$ を仮定していることから

$$x-\alpha=0 \quad \text{または} \quad x-\beta=0\text{、すなわち、}x=\alpha \quad \text{または} \quad x=\beta$$

がいえる。よって、2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が因数分解できて $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ となるならば、解は $x=\alpha,\ \beta$ である。ちなみに、ここでは解を “,” を使って列挙したのだが、この場合の “,” は “または” の意味であることを注意しておこう。

* * *

いま、ax^2+bx+c の因数分解を $a(x-\alpha)(x-\beta)$ と書いたのだが、左辺がすべて $+$ の項であるのに、右辺に $-$ の項を含めたことをいぶかしく思うかもしれない。たしかに左辺に倣えば $ax^2+bx+c=a(x+\alpha)(x+\beta)$ と書くのが自然であろう。こう書くことで右辺を展開した $ax^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ を左辺に対応させて、$b=\alpha+\beta$、$c=\alpha\beta$ という関係がすぐに見える。

この見方は、展開式と符号の関係だけに着目するなら正しい。しかし因数分解の目的は、方程式の解を見つけることであることに注意しなくてはならない。その目的のためには、解は一目で分かる方がよい。たしかに因数分解だけを見れば $ax^2+bx+c=a(x+\alpha)(x+\beta)$ が自然な書き方かもしれないが、方程式 $a(x+\alpha)(x+\beta)=0$ を考えた場合、解は $x=-\alpha,\ -\beta$ であるから、方程式の解には常に “$-$” がつきまとうことになる。これでは、解が一目で分かるとは言いがたいのではないだろうか。▮

2 次方程式の解法

2 次方程式は因数分解できる限りにおいて簡単に解けることが分かった。しかし、2 次式がいつも因数分解できるとは限らない。そのようなときは、どのような方法で解けばよいだろうか。その

ために、まずもっとも簡単な 2 次方程式である $x^2 = D$（$D \geqq 0$）を考えてみる。これは平方根の定義から

$$x^2 = D \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{D}$$

と解ける。細かいことを言うなら、$D = 0$ の場合は $x = \pm\sqrt{0}$ ではなく $x = 0$ が解である。

このとき、x が定数項を持っていたら—すなわち x が $x + b$ だったら—2 次方程式は $(x+b)^2 = D$ であるから、

$$(x+b)^2 = D \quad \Longrightarrow \quad x + b = \pm\sqrt{D} \quad \Longrightarrow \quad x = -b \pm \sqrt{D}$$

と解ける。以上のことから 2 次方程式を解く手順が見えてきた。具体的に $2x^2 + 3x - 1 = 0$ ならば以下のように解くことができる。

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} &= 0 && \text{（両辺を 2 で割った）} \\
x^2 + \frac{3}{2}x &= \frac{1}{2} && \text{（定数項を移項した）} \\
x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} &= \frac{1}{2} + \frac{9}{16} && \text{（両辺に}\frac{9}{16}\text{を加えた）※} \\
\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 &= \frac{17}{16} && \text{（左辺の因数分解と右辺の整理）} \\
x + \frac{3}{4} &= \pm\frac{\sqrt{17}}{4} && \text{（平方根の定義より）} \\
x &= -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{17}}{4}\,. && \text{（}x\text{ の解）}
\end{aligned}$$

手順を見ていちばん不思議な箇所は、両辺に $\frac{9}{16}$ を加えた※の行かもしれない。なぜ $\frac{9}{16}$ を加えてうまくいったかというと、それは x の係数が $\frac{3}{2}$ だったからである。理由は、因数分解の公式 $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ を $x^2 + 2bx + b^2 = (x+b)^2$ と読み替えてみるとよく分かる。平方式に因数分解できるためには、x の係数が $2b$ で定数項が b^2 である必要がある。これは言葉を変えれば

$$\text{定数項は、}x\text{ の係数の}\frac{1}{2}\text{倍を 2 乗したもの}$$

でなければならないということである。だから、x の係数が $\frac{3}{2}$ のときに、加える定数項は $\frac{9}{16}$ だったのである。

2 次方程式の解の公式

ここで、一般の 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ を手順に従って解いてみよう。

$$
\begin{aligned}
x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} &= 0 && \text{(両辺を } a \text{ で割った)}\\
x^2+\frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} && \text{(定数項を移項した)}\\
x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2} &= -\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2} && \text{(両辺に } \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \text{ を加えた)}\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2} && \text{(左辺の因数分解と右辺の整理)}\\
x+\frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && \text{(平方根の定義より)}\\
x &= -\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\,. && \text{(} x \text{ の解)}
\end{aligned}
$$

手順は、先に具体的な数値で行ったものとまったく同じである。最後の x の解を見れば、解はもとの 2 次式の係数だけが使われていることが分かる。このことは、もとの 2 次式の係数さえ分かっていれば、2 次方程式は係数の値を当てはめるだけで解けるということである。

$$
\boxed{\begin{array}{c}\text{2 次方程式 } ax^2+bx+c=0 \text{ の解は}\\ x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\end{array}}
$$

たとえば、$3x^2+4x-1=0$ の解は、解の公式より

$$
x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 3\cdot(-1)}}{2\cdot 3}=\frac{-4\pm\sqrt{28}}{6}=\frac{-4\pm 2\sqrt{7}}{6}=\frac{-2\pm\sqrt{7}}{3}
$$

のように直ちに求められる。

* * *

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ を平方式を作る手順で解けば $x=-\dfrac{b}{2a}\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ であるが、解の公式としては $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ である。公式というものは暗記して使うことを前提にしているので、当然記憶量が少なくなるように、後者の記述がされるのであろう。しかし、そのように記述すると数というより数式のような感じを受けてしまうかもしれない。

本来 $\sqrt{\ }$ で記述された数は、そうでない数とは相容れないために $a+\sqrt{b}$ のように書かれるのである。それを常に公式のような記述で済ませていると、$a+\sqrt{b}$ をさらに実数で割っている式に見えるため、数の意識が薄れるのではないかと心配である。公式としての記述はそれでよいのだが、あくまでも $a+\sqrt{b}$ の形の数であることを忘れてはならないだろう。▌

解の公式から派生する公式

本来ならばこのような公式を定着させるために、数多くの練習問題を解くのだろうが、ここでは単に読み物のつもりで先を急いでしまおう。練習問題を多く解けば、おそらく公式から得られ

る解によっては、根号内が簡単になる場合とならない場合があることに気づくはずである。最初に解いた 2 次方程式 $2x^2+3x-1=0$ は根号内が簡単にならなかった。次に解いた 2 次方程式 $3x^2+4x-1=0$ は根号内が簡単になって約分ができた。

違いはどこにあるのだろうか。結論を言えば、x の係数にある。x の係数が偶数の場合は必ず根号内が簡単になって約分ができるのである。そのことを確かめておこう。x の係数が偶数であることを $2b'$ で表すことにすると、目的の 2 次方程式は $ax^2+2b'x+c=0$ であるから、手順により

$$
\begin{array}{rcll}
x^2+\dfrac{2b'}{a}x+\dfrac{c}{a} &=& 0 & \text{(両辺を } a \text{ で割った)} \\
x^2+\dfrac{2b'}{a}x &=& -\dfrac{c}{a} & \text{(定数項を移項した)} \\
x^2+\dfrac{2b'}{a}x+\dfrac{b'^2}{a^2} &=& -\dfrac{c}{a}+\dfrac{b'^2}{a^2} & \text{(両辺に } \left(\dfrac{b'}{a}\right)^2 \text{ を加えた)} \\
\left(x+\dfrac{b'}{a}\right)^2 &=& \dfrac{b'^2-ac}{a^2} & \text{(左辺の因数分解と右辺の整理)} \\
x+\dfrac{b'}{a} &=& \pm\dfrac{\sqrt{b'^2-ac}}{a} & \text{(平方根の定義より)} \\
x &=& -\dfrac{b'}{a}\pm\dfrac{\sqrt{b'^2-ac}}{a} & (x \text{ の解)}
\end{array}
$$

となることが分かった。結局、

$$
\boxed{\begin{array}{c}\text{2 次方程式 } ax^2+2b'x+c=0 \text{ の解は} \\ x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}\end{array}}
$$

である。実際、$3x^2+4x-1=0$ を $3x^2+2\cdot 2x-1=0$ と見れば

$$
x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-3\cdot(-1)}}{3}=\frac{-2\pm\sqrt{7}}{3}
$$

が直ちに求まるのである。