不等式の性質 I

方程式を深く学ぶ前に、ここで不等式に触れておきたい。不等式は等式の “=” を不等号に変えた式を指すのだが、不等号には、“<”、“>”、“≦”、“≧” の 4 種類がある[1]。それぞれの使い方は

$$a \quad < \quad b \quad (a \text{ は } b \text{ より小さい、} a \text{ は } b \text{ 未満})$$
$$a \quad > \quad b \quad (a \text{ は } b \text{ より大きい、} a \text{ は } b \text{ を超える})$$
$$a \quad \leqq \quad b \quad (a \text{ は } b \text{ 以下、} \boldsymbol{a < b} \textbf{ または } \boldsymbol{a = b})$$
$$a \quad \geqq \quad b \quad (a \text{ は } b \text{ 以上、} \boldsymbol{a > b} \textbf{ または } \boldsymbol{a = b})$$

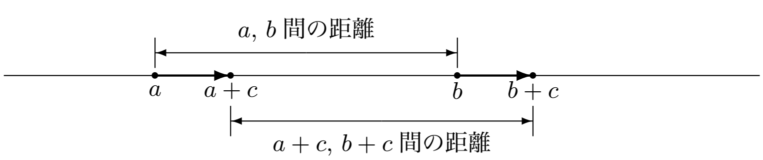
のようになっている。“=” の有る無しで意味が微妙に違う点に注意する必要がある。とくに “=” が付いている不等号は一般に「以下」「以上」と読むが、数学的には太字で示した意味で使われている。このことは、$3 < 6$ が明らかに正しいように、$3 \leqq 6$ も明らかに正しいということである。なぜなら “A または B” という表現が正しいというのは、A か B のどちらか一方が正しいときであるからだ。したがって、$3 \leqq 6$ という表現は $3 < 6$ または $3 = 6$ を意味し、“または” の使い方に照らしてまったく正しいと言えるのである。

≦、≧ の用法は日常的な感覚からすると多少の違和感はあるかもしれないが、それを受け入れた上で不等式の性質について調べよう。しかしその前に、ほとんど公然の事実と思えることを述べておく。2 数 a、b の間には

$$\boxed{a < b, \quad a = b, \quad a > b \quad \text{のうちのただ 1 つの関係だけが成り立つ}}$$

ということである。数直線上の任意の 2 点を考えれば明らかであろうが、実はこれは**大小に関する公理**である。不等式の性質が成立するのは、この公理が土台にあるからであり、また、堂々と “≦” のような記号が使えるのも公理のおかげである。

不等式の性質は等式の性質に似て、$a < b$ ならば $a + c < b + c$ が成り立つ。



このことは、数直線上で $a < b$ である 2 点とそれらに加える c を考えるとよい。$a < b$ というのは、a の右側に b があることである。また、c を加えるというのは、c の大きさだけ矢線を継ぎ足すことである。その結果、始めの a, b 間の距離と、c を加えた後の $a + c, b + c$ 間の距離にはまったく

[1] ≦、≧ は日本固有の記号らしく、国際的には ≤、≥ が使われているようである。

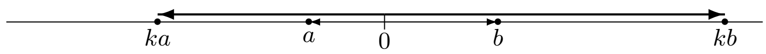
変化がない。これは、大小関係がまったく変化しないことを意味するので、不等式の両辺に同じ値を加えても大小関係は変わらないのである。このことは c を $-c$ に変えても同じことがいえるので

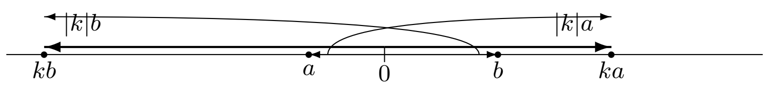
$$\boxed{a < b \quad \text{ならば} \quad a \pm c < b \pm c}$$

が分かった。等式で同様の性質が成り立つことは確認しているので、繰り返しになるが $\leqq$ の用法に従えば、$<$ が $\leqq$ でもまったく同じであることが分かるだろう。

不等式の性質 II

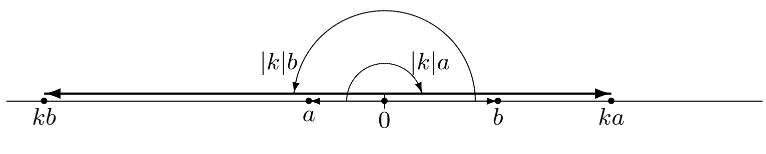
不等式に同じ数を加える場合を考えたので、次は同じ数を掛ける場合を考えよう。掛け算は複数回の足し算と思ってもよいのだが、後のために、数を掛けることが数直線上で何を意味するかを見直しておこう。



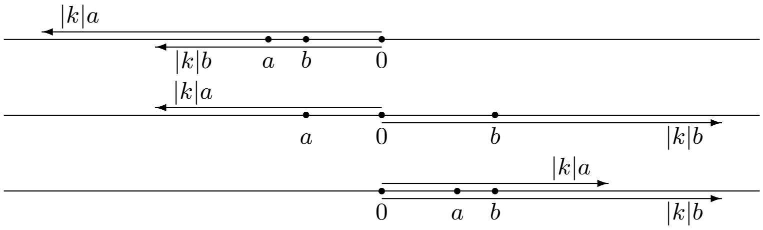


数直線上で実数 a や b を $k > 0$ 倍することは、原点 0 を始点とする矢線を**その方向に** k 倍することであった。また、$k < 0$ 倍することは、原点 0 を始点とする矢線を**反対方向に** $|k|$ 倍することであった。

しかし、ここでは次のように見直しておこう。それは、数直線上で実数 a や b を k 倍することは、原点 0 を始点とする矢線をその方向に $|k|$ 倍し、$k < 0$ の場合に限り $|k|$ 倍した矢線を原点中心に $180°$ 回転させることである、と。



さて、k を正の値とし a、b を k 倍することを考えてみる。このとき矢線が $|k|$ 倍されるのであるが、その方向は a、b の正負によって変わるだろう。



しかし変わらないものもある。それは $a<b$ ならば $|k|a<|k|b$ であるということだ。結局、a、b、k の値によって $|k|a$ や $|k|b$ の位置や 2 数間の距離に違いはあっても、a が b の左にあれば $|k|a$ は必ず $|k|b$ の左にあることになる。すなわち、

$$\boxed{a<b \text{ かつ } k>0 \quad \text{ならば} \quad ka<kb}$$

であることがいえた。

$k<0$ の場合はどうだろう。この場合は、$|k|a$ と $|k|b$ は原点 0 を中心に左右が入れ替わる。このことは、必ず $|k|a<|k|b$ であったものが、間違いなく $|k|a>|k|b$ になることを意味する。すなわち、

$$\boxed{a<b \text{ かつ } k<0 \quad \text{ならば} \quad ka>kb}$$

であることがいえた。一般に、不等式の両辺に同じ数を掛けることができるが

不等式の両辺に同じ値の負の数を掛けた（割った）ら、不等号の向きが逆になる　（※）

のである。掛けることと割ることは同じ操作であるから、上記の文には併記しておいた。

*　*　*

実数を負の値によって k 倍する際、矢線を反対方向へ $|k|$ 倍する代わりに、矢線を $|k|$ 倍したのち 180° 回転させるように見直したことを疑問に思っているのではないだろうか。数直線上の操作としてみれば、これらはどちらもまったく同じ操作をしている。にもかかわらず見直した理由は、大小関係を明確にするためである。なぜなら、180° の回転であれば、大小関係の逆転が明確になるが、反対方向へ $|k|$ 倍するだけでは、必ずしも大小関係の逆転が明確にならないからである。

そして、もうひとつ理由がある。それは負の数を掛けることが、実際、矢線の 180° の回転にあたるからである。180° の回転というと、物理的には矢線を数直線からはみ出させないと実現できない操作である。しかし、反対方向へ $|k|$ 倍することなら、矢線をゴムひものようなものと考えれば、数直線上で逆向きに引っ張ることができる操作である。数を表すための矢線は数直線上に収まるべきものだと思えば、回転させる方が非現実的に見えるだろうが、数の本来の姿からは回転が現実的な操作なのである。このことについては、いま詳しく述べることではないので、**複素数**に関して学ぶことになろう。▮

不等式を解く

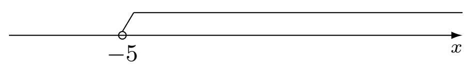
不等式の性質を注意深く読めば、それがただ 1 点を除いて方程式の性質と同じことに気づくであろう。ただ 1 点とは※の性質—負の数で乗除をすると不等号の向きが逆になる—である。このことから不等式を解くには、方程式とまったく同じ解き方ができるのだが、負の数の乗除に関しては注意が必要であるということになる。具体的に不等式

$$2(x-3) < 5x+9 \quad (☆)$$

を解くと以下のようになる。

$$\begin{array}{rcll} 2x-6 & < & 5x+9 & (展開した) \\ 2x-5x & < & 9+6 & (移項した) \\ -3x & < & 15 & (整理した) \\ \dfrac{-3x}{-3} & > & \dfrac{15}{-3} & (\,-3 で割って > の向きにした) \\ x & > & -5\,. & \end{array}$$

解を数直線上に簡単に図示すると



のようになる。図は、-5 より右のすべての値が x の解になりうることを示している。たとえば☆に $x=1$ を代入すると、不等式は $-4 < 14$ となって正しい。$x=-5$ を代入すると $-16 < -16$ となって、ここが正誤の境となる。不等式の範囲を数直線上に図示するときは、習慣として、境にあたる値を含めない場合は $\circ$ で、含める場合は $\bullet$ で表すことにしている。

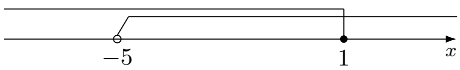
連立 1 元 1 次不等式

2 個以上の不等式があれば連立不等式となる。不等式は方程式と違って、ある範囲の解を求めるのであるから、連立不等式の解も基本的にある範囲を示すことになる。

実際に連立不等式

$$\begin{cases} 2(x-3) & < & 5x+9 & \ldots(1) \\ 4x+1 & \leqq & 3x+2 & \ldots(2) \end{cases}$$

を解くと、(1) はすでに解いたとおり $x > -5$ であり、(2) は $x \leqq 1$ である。これを数直線上に簡単に図示すると



のようになる。したがって、ここでの連立不等式の解は $-5 < x \leqq 1$ である。

*　*　*

不等式の範囲を数直線に図示する場合、境界の値を含めるかどうかで丸印の色を変えていることは述べた。前出の数直線上の範囲を注意深く見れば分かると思うが、$\circ$ から延びる線はやや斜めに描いてあるが、$\bullet$ から延びる線は垂直になっている。その理由は、斜めの線にすると境の値が範囲の外にあるように見えるし、垂直の線にすると境の値まで入るように見えるからである。しかし、値を含むかどうかはすでに $\circ$、$\bullet$ で区別しているので、まったく無用の気遣いともいえるだろう。▮