加減法

加減法を用いて具体的な連立方程式

$$\begin{cases} 4x+5y &= 3 \quad \dots(1) \\ 3x-y &= 7 \quad \dots(2) \end{cases}$$

を解くことにしよう。方程式を確実に解くためには未知数を 1 個に減らす必要がある。加減法と呼ぶからには方程式を加減することになるが、このまま加減したのではうまくない。いま y を**消去**することに狙いを定めて、(2) を 5 倍して 2 つの式を辺々加えることにすると

$$\begin{array}{rrcrl} & 4x+5y &=& 3 & \dots(1) \\ +) & 15x-5y &=& 35 & \dots(2)\times 5 \\ \hline & 19x &=& 38 & \end{array}$$

のように未知数が x だけの方程式になって $x=2$ が解けたことになる。y を求めるには、$x=2$ を (1) か (2) に代入すればよい。

この例では一方の方程式だけを定数倍しているが、必要なら両方の方程式にそれぞれ適当な定数を掛ければ必ず未知数を消去できるのである。

一般に、連立方程式は

$$\begin{cases} ax+by &= m \\ cx+dy &= n \end{cases} \text{ に } d,\, b \text{ を掛け } \begin{cases} adx+bdy &= dm \\ bcx+bdy &= bn \end{cases} \text{ とすれば}$$

$(ad-bc)x = dm-bn$ から $x = \dfrac{dm-bn}{ad-bc}$ と解ける。同様に $y = \dfrac{an-cm}{ad-bc}$ であるから、連立 2 元 1 次方程式には係数を用いた解の公式が存在するといえる。公式があれば便利だと考えがちだが、連立方程式は場合によって加減法以外で解いた方がよいこともある。また、分数の分母が 0 であってはならないので、$ad-bc \neq 0$ を確認する必要もある。このようなことから、連立方程式の解を公式化する価値は低いのである。

代入法

代入法は文字通り代入をすることによって連立方程式を解くものである。再び先の連立方程式を考えることにする。代入するためには $x=\cdots$ もしくは $y=\cdots$ が必要になる。この場合は (2) を移項することで

$$y = 3x-7$$

がすぐに得られるので、これを (1) に代入すればよい。すると (1) は

$$4x + 5(3x - 7) = 3$$

であるから、これを解いて $x = 2$ を得ることができる。

等置法

等置とは、等しいものに置き換えるという意味である。先の連立方程式は等式に違いないが、等号の左右はまったく同じでないことは見れば分かる。代入法で (2) を $y = \cdots$ の式に書き換えたので、ここでは (1) も $y = \cdots$ の式に書き換えてみよう。すると連立方程式は

$$\begin{cases} y = \dfrac{-4x+3}{5} & \ldots(1') \\ y = 3x - 7 & \ldots(2') \end{cases}$$

のように、ともに y で表されることになった。これは右辺の x の式が等しいことを意味するので

$$\frac{-4x+3}{5} = 3x - 7$$

としてよい。方程式としてはやや複雑になったかもしれないが、単なる 1 次方程式であるからきちんと解けるのである。実際に解くときは、等式の性質により両辺に 5 を掛けることで**分母を払い**

$$\frac{-4x+3}{5} \times 5 = (3x - 7) \times 5$$

としてから解けばよいだろう。もちろん $x = 2$ が解である。

特殊な連立方程式

ここで少し特殊な連立方程式

$$\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \quad \text{(A)}$$

を考えてみよう。これは、加減法・代入法のどちらを試みても $0 = 0$ という等式ができてしまう。$0 = 0$ は常に成立する等式であるから、未知数 x の値に関係なく成立していると考えてよい。このことは

どのような x に対しても連立方程式は正しい

ことになるので、x の解としては「**すべての実数**」が当てはまる。実際、等置法で $y = \cdots$ の式を作ってみると、$2x-3=2x-3$ という恒等式が得られるので、たしかに x はすべての実数で成り立つことが分かるのである。

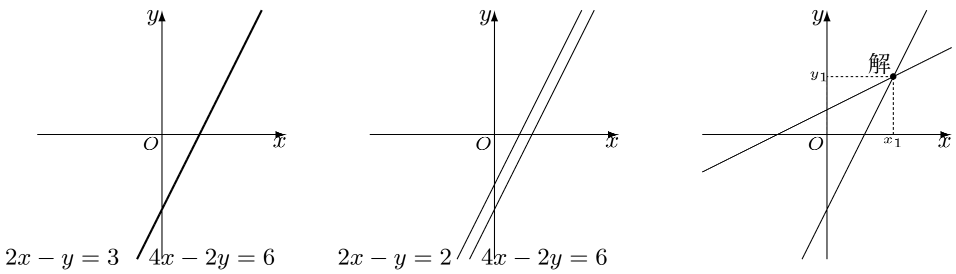
次に、連立方程式

$$\begin{cases} 4x-2y &= 6 \\ 2x-y &= 2 \end{cases} \quad \text{(B)}$$

を考えることにしよう。これは加減法を試みると $0=2$、代入法を試みると $4=6$ のような等式ができる。明らかに不条理な式である。そこで等置法で $y = \cdots$ の式を作ってみると $2x-3=2x-2$ を得るが、右辺は左辺より常に 1 大きいわけなので、どんな x に対しても等式が成り立つことはない。すなわち「**解なし**」ということである。

*　*　*

連立方程式において、すべての実数が解になったり、解がなかったりする様子は、方程式を関数のグラフに関連させてみればよく分かる。



方程式 (A) はどちらも同じ直線を表すので、グラフの上では重なってしまう。そのため、どこもかしこも共通の解になるのである。一方、(B) は平行な直線を表すので、グラフに共通する部分はない。そのため、解がないのである。解が 1 つに決まるということは、2 つの直線が重なりもせず、平行になりもしない状態になってるからで、しかも、その場合は交点は 1 つしかない。これが方程式の解 $x=x_1$, $y=y_1$ になっている。▮

連立 3 元 1 次方程式

次のような連立方程式は、未知数が 3 個ですべて 1 次の項からなっているので、連立 3 元 1 次方程式という。

$$\begin{cases} 4x+5y+z &= 6 \quad \ldots(1) \\ 3x-y-2z &= 1 \quad \ldots(2) \\ -x+2y+3z &= 5 \quad \ldots(3) \end{cases}$$

このように未知数や等式の数が増えると、解くことが面倒になってくる。加減法、代入法、等置法のいずれで解いてもよいのだが、このようなときは加減法を用いるのが解きやすい。実際、

(1) $\times 2 +$ (2) と (1) $\times 3 -$ (3) を計算すると

$$\begin{cases} 11x + 9y = 13 & \ldots(4) \\ 13x + 13y = 13 & \ldots(5) \end{cases}$$

のように z を消去することができ、以前扱ったことがある連立 2 元 1 次方程式に帰着できるからである。この場合 (5) は、13 で割って $x + y = 1$ とした上で加減法か代入法を用いればよいだろう。

ところで、2 元の連立方程式を解く際は等式が 2 個で、3 元の連立方程式を解く際は等式が 3 個であったのは偶然ではない。基本的に n 元の連立方程式の解が一意に定まるためには、少なくとも n 個の等式が必要だからである。たとえば先の連立方程式が、3 個の未知数に対して 2 個の等式しか与えられていない

$$\begin{cases} 4x + 5y + z = 6 & \ldots(1) \\ 3x - y - 2z = 1 & \ldots(2) \end{cases}$$

であったとしたら、解は一意に定まらない。

理由は、z を未知数でなく定数であると考えると、連立方程式は

$$\begin{cases} 4x + 5y = 6 - z & \ldots(1') \\ 3x - y = 1 + 2z & \ldots(2') \end{cases}$$

と見ることができ、加減法で解けば $x = \dfrac{11 + 9z}{19}$、$y = \dfrac{14 - 11z}{19}$ となって、z に任意の値を入れることで無数の解を得ることができるからである。

逆に等式の数が多すぎても困る。3 元の方程式なら 3 個の等式で事足りるのに、そこに 4 個めの等式があった場合、たまたま 3 個の等式から求めた解が 4 個めの等式を満たせばよいが、そうでなければ解が求められたことにはならない。

一般に

連立 n 元 1 次方程式は、異なる n 個の等式があるときに限って一意に解ける

といえるだろう。