等式の性質

　これから**方程式**と**不等式**にまつわる話題に入ることにしよう。まず始めに、方程式は**等式**の一種であることを注意しておきたい。私たちは等式を、**等号** “=” でつながれた式であると認識している。そして式の計算に際しては、無造作に $=$ を使って計算していることだろう。そのようなことが広く行えるのは、私たちが暗黙の了解として

$$\boxed{\text{(I) } a=a, \qquad \text{(II) } a=b \text{ ならば } b=a, \qquad \text{(III) } a=b,\ b=c \text{ ならば } a=c}$$

のようなことを認めているからである。これらは**同値律**と呼ばれる**公理**である。公理は数学の “道理” として認められた事柄で、たいていは証明のしようがないものである。証明不可能という点で、公理は定義に近いものがある。

　(I) や (II) は定義だとか公理だとか言う前に、明らかすぎるほど当たり前のことと思うかもしれない。しかし “$a=b$” という数式は、“a は b である” という言葉が形を変えている点を踏まえれば、必ずしも明らかというわけではない。たとえば a や b が数値ならば、“**5** は 5 である” と言おうが “5 は **5** である” と言おうが同じことである（a と b を区別するため文字の太さを変えた）。ところが、“私は大人である” と “大人は私である” では意味が違うので、この場合は “私 = 大人” ならば “大人 = 私” とはいえない。このことからも等号は、言葉の道理にかなった記号ではなく、数式の道理にかなった記号であることが感じられるだろう。

　次に、私たちがほとんど常識の範囲と考えている関係

$$\boxed{a=b \text{ ならば } a+c=b+c \quad \text{(T)}}$$

を考えよう。これを数式化される以前の状態、すなわち言葉で読み直して

$$a \text{ は } b \text{ であるならば、} a \text{ 足す } c \text{ は } b \text{ 足す } c \text{ である}$$

としてみる。さて、これ以前に

$$a \text{ 足す } c \text{ は、} a \text{ 足す } c \text{ である} \quad \text{(P)}$$

は道理であるから正しい。このとき “a は b である” ならば、a を b に読み替えても何ら問題はないので、(P) の 2 番目の a を b に読み替えて

$$a \text{ 足す } c \text{ は、} b \text{ 足す } c \text{ である} \quad \text{(P}')$$

としてもかまわない。これを数式化したものが (T) であるから、(T) も数学の道理となる。

ところで、このような根源的な公理を持ち出さなくとも、

もともと等しいもの同士は、それぞれに同じことをしても等しいことに変わりない

という性質は受け入れているに違いない。これは、もともと等しいものとして $\underline{A = B}$ を仮定すれば

$$\boxed{\text{(IV) } A + C = B + C, \qquad \text{(V) } AC = BC, \qquad \text{(VI) } \frac{A}{C} = \frac{B}{C}\ (C \neq 0)}$$

が成り立つことを意味する。とくに (IV) は、$C = -C'$ ならば $A - C' = B - C'$ と見てよいので、等式の**両辺**には同じ数を「足す・引く・掛ける・割る」してよいことが分かるのである。

*　*　*

“定義” は「なになにをこれこれと決める」という具合に、数学における約束事である。しかし、すぐに破綻するような約束では意味がないので、定義は数学の道理に照らして矛盾が生じないような約束でなければならない。その上で数学は、意味のある定義からいろいろな真理を導いていくものであり、真理を導く過程が “証明” である。ふつうに考えると、定義を決め、定義から真理を導いて数学が構築されると思うだろう。ところが、真理であるにもかかわらず定義から証明できないことがある。

“=” の定義は何だろう。それは “等しい” である。すると $a = a$ と書いたら、a は a に等しいことになる。そのことは真理である。では、a が a に等しいことを証明できるだろうか。a が a に等しいことは定義ではないかと思うかもしれないが、そうではない。道理として a が a に等しいことは認めてもよいが、数学の道理として証明できるものではないのである。このことから $a = a$ は公理なのである。▮

方程式

方程式は等式の一種であると言ったが、次の 2 種類の等式には明確な違いがある。

$$\begin{aligned} x + 1 &= x^2 + 2x + 1 \quad \text{(a)} \\ (x+1)^2 &= x^2 + 2x + 1 \quad \text{(b)} \end{aligned}$$

(a) は方程式と呼ばれる。(b) は**恒等式**と呼ばれる。どちらも等式であることに違いないが、(a) と (b) を区別するのには理由がある。(a) は特定の x —この場合は $x = 0, -1$ —に限り等式が成り立つ。一方 (b) は、どんな x の値に対しても成り立つ。つまり**未知数** x に対して、特定の値だけで成り立つ等式が方程式、どんな値でも成り立つ等式が恒等式である。恒等式は常に成り立つ等式なので、**公式**として利用されることが多い。方程式は特定の値でしか成り立たないので、等式を成立させる未知数を求めること、すなわち方程式を**解く**ことに主眼がおかれることが多い。方程式を満たすものを方程式の**解**、または**根（こん）**という。

たとえば x に関する 1 次方程式

$$ax + b = 0$$

を考えよう。ここでは x が未知数、a、b が定数である。簡単のため $a \neq 0$ として解くことにする。

$$\begin{aligned} ax+b &= 0 && (*) \\ ax+b-b &= 0-b && (\text{両辺から } b \text{ を引いた}) \\ ax &= -b && (**) \\ x &= -\frac{b}{a}. && (\text{両辺を } a \text{ で割った}) \end{aligned}$$

順に等式を変形する際、等式の性質を適宜使っている。1 次方程式はこのような手順で解くものだが、2 行目を見ないで $*$ から $**$ へ目を転じてほしい。すると方程式が

$$\begin{aligned} ax+b &= 0 \\ ax &= -b \end{aligned}$$

と変化するわけだが、見ようによっては、**左辺**にあった $+b$ が $=$ を飛び越えて、$-b$ になって**右辺**に移動したように見える。逆に等式の変形を下から上へ追えば、右辺の $-b$ が左辺へ移動する際 $+b$ になったように見える。正規の手順で変形した等式がそのように見えるのならば、そのように見える操作を正規の手順としてよいだろう。つまり、等式の両辺に同じ数を足す・引くすることは、見かけ上、

等式の一方の側から他方の側へ、項の符号を変えて移動させてよい

ことを指している。この操作を**移項**といい、等式の性質に加えることにする。

* * *

中学・高校くらいの数学では、方程式を満たす x の値に根という表現を用いることはあまりないようである。それは、根と解を厳密に区別する必要がないからであろう。ふつう、どんな x の方程式であっても、その方程式を満たす x の値は "解" と呼ばれる。そして一般に、代数方程式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

の解をとくに "根" と呼んでいる。学校で最初に習う方程式は代数方程式なのだから、始めから根と呼ぶ習慣をつければよさそうに思えるが、そう簡単な話ではないのだろう。

別の解釈としては、たとえば代数方程式 $(x-3)^2 = 0$ の根は $x = 3, 3$ の 2 つと数えるが、方程式の解として記述する際は $x = 3$ である、ということはあるかもしれない。

いずれにせよ、方程式においては代数方程式は歴史的に別格の扱いを受けてきた。このため、代数方程式の解に特別の名称があってもおかしくはない。しかし、時代とともに方程式の解き方は変わってきているのだろう。とくにコンピュータを利用して方程式を解くことは常識になってきた。コンピュータにとっては、方程式が代数方程式だろうがそうでなかろうが大差ないと思われる。このような背景も含めて、方程式はひとまとめに扱われ、根と解の解釈の違いも混然となっていくのかもしれない。▮

$ax+b=0$ の解

1 次方程式 $ax+b=0$ を解く際、$ax=-b$ から先を簡単のため $a\neq 0$ として考えたが、それでは方程式を完全に解いたことにならない。$a=0$ の場合も考えなくてはならないだろう。ところで $a=0$ であれば、方程式 $ax+b=0$ は $b=0$ と同じことになって、式の中に x がないのに方程式と呼ぶことを変に感じるかもしれない。しかし $a=0$ の場合は、$0x+b=0$ という 1 次方程式と見るのである。このとき、さらに $b=0$ であれば方程式は、$0x=0$ なる恒等式になる。恒等式はあらゆる x について等式を満たすので、解は無数にあることになる。また、$b\neq 0$ であれば方程式は、$0x=-b$ になる。等式は左辺が 0 を表し、右辺が 0 でないことを表しているので、方程式に矛盾が生じる。すなわち、方程式を満たす解はないことになる。

以上をまとめると、1 次方程式

$$ax+b=0\text{ の解は}\begin{cases} a\neq 0\text{ のとき} & x=-\dfrac{b}{a} \\ a=0\text{ のとき} & \begin{cases} b=0\text{ ならば} & \text{無数の解} \\ b\neq 0\text{ ならば} & \text{解なし} \end{cases} \end{cases}$$

となるのである。

連立 2 元 1 次方程式

未知数を含む等式を方程式と呼んできたが、方程式は未知数の種類によって様々な呼び方がされる。まず方程式に含まれる未知数は**元（げん）**という。$4x+5=0$ には未知数が 1 種類しかないので 1 元方程式、$4x+5y=0$ には未知数が 2 種類あるので 2 元方程式、という具合である。また、各項に含まれる未知数をそれぞれ数え、そのうち最大の数をその式の**次数**という。$4x+5=0$ は $4x$ の項に 1 個の未知数があり、これが最大数だから 1 次方程式、$4x+5y^2z=0$ は $5y^2z$ の項に 3 個の未知数があり、これが最大数だから 3 次方程式、という具合である。そして、複数の方程式を一組にまとめて扱うと**連立方程式**と呼ばれる。

そこで連立 2 元 1 次方程式であるが、連立ということから複数の方程式があり、2 元ということで未知数が 2 種類あり、1 次ということで各項の最大文字数が 1 個であることが分かる。具体的には

$$\begin{cases} 4x+5y &= 3 \\ 3x-y &= 7 \end{cases}$$

のような方程式を指す。この方程式の解が $x = 2,\ y = -1$ であることは、実際に x と y の値を代入すれば分かることである。しかし、与えられた連立方程式から未知数の値を特定するためには、それなりの方法がいくつか用意されている。いずれも 2 個ある未知数を工夫して 1 個に減らし、得られた 1 次方程式を解くことで解決する方法である。