$\log_a x$ の導関数

これでようやく $f(x) = \log_a x$ の導関数を求める準備ができた。それは

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

であったのだが、$\dfrac{x}{\Delta x} = n$ とおいて

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

を計算することと同等である。“同等” と言ったのは実数値 x と整数値 n の違いを指してのことだが、極限値を求めるという点では同じであることを注意しておきたい。

ところで $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ が収束することは分かったのだが、肝心の値は不明のままである。Microsoft Excel では 2.7 程度になることを確かめてあるが、本当の値はどうやって計算するのだろうか。結論を言えば、この値は円周率同様、簡単に表せないことが分かっていて、正確には

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828459045\cdots$$

である。そこで円周率を π で表すように、これを e で表すことにする。このことから $f(x) = \log_a x$ の導関数は

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e}$$

と書けることになる。

ところで対数関数や指数関数は積を和にできるという性質が重視されるので、本来は底の値にこだわる必要はない。ただ、私たちは日常的に 10 進数を使っているので、常用対数の底に 10 を使ってきたに過ぎない。微分においても、重要なのは対数の性質であるから、底の値は何でもよい。その場合、底を e にすると都合がよい。なぜなら、対数関数の微分が

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x} \log_e e = \frac{1}{x}$$

になるからである。こうすると、$\log_a e$ のような妙な定数が付かないのでとてもありがたい。そこで微分に対数関数が絡む場合は、底を e にした**自然対数**を重用したい。一般には底を省略した対数関数 $\log x$ は $\log_{10} x$ のことだが、これからは $\log x$ とは $\log_e x$ を指すことにし、常用対数は $\log_{10} x$ と記述することにしたい。これに従うと

$$\boxed{(\log x)' = \frac{1}{x}}$$

である。また、$\log_a e = \dfrac{1}{\log_e a} = \dfrac{1}{\log a}$ と書けることから、$\log_a x$ の導関数は

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\log a}}$$

と記述してもよいだろう。

* * *

いままで常識的に行ってきたことが急に路線変更されると、いろいろなところに歪（ひず）みや誤解が生じてしまう。たったいま $\log x$ と書いたらそれは $\log_e x$ であると約束したのだが、日常的に $\log x$ は $\log_{10} x$ である感覚は根強く残っているかもしれない。数学の世界では底が e の対数さえあれば十分なのだが、工業などの世界では $\log_{10} x$ も $\log_e x$ も対等に使っている。そのような状況ではいたずらな変更で混乱しないように、$\log_{10} x$ は $\log x$ で通し、$\log_e x$ は $\ln x$ で記述することも多い。ln は “log of nature” の略である。▮

a^x の導関数

指数関数 $f(x) = a^x$ の導関数を求める際に

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

までたどり着いたのはよいが、暗礁に乗り上げていた。要は $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ の値が分かればよいのである。ところで $n \to \infty$ のとき $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ であるから、$t = \dfrac{1}{n}$ とおくと、$t \to 0$ のとき $(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ といえる。

少し唐突かもしれないが、ここで $\dfrac{\log_a(1+t)}{t}$ を考えると、

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log_a(1+t)}{t} = \lim_{t \to 0} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} = \log_a e \quad (※)$$

であることが分かる。さて、$t \to 0$ であれば $\log_a(1+t) \to 0$ であるから、微小な値をとり得る $\log_a(1+t)$ を Δx とおくことに違和感はないはずだ。その上で、対数表記を指数表記にすると $1 + t = a^{\Delta x}$ となるから $t = a^{\Delta x} - 1$ である。これらを踏まえて（※）の関係を書き換えると

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{a^{\Delta x} - 1} = \log_a e$$

を得る。知りたかったのはこの逆数であるから、$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{1}{\log_a e} = \log_e a$ となる。

以上のことから、$f(x) = a^x$ の導関数は

$$\boxed{(a^x)' = a^x \log a}$$

である。ここでは数学の習慣にしたがい、$\log_e a$ を $\log a$ と記述している。

指数関数の底 a は自由な値—といっても 1 以外の正の値に限る—をとれるので、$a = e$ ならば $y = e^x$ の導関数が求められる。$a = e$ とした上で $\log_e e = 1$ であることを用いて

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

を得る。

$f(x) = e^x$ という関数

たったいま分かったように $f(x) = e^x$ という関数は、微分しても関数の形が変わらない。微分することで得られる関数は、接線の傾きを表す関数である。したがって $f(x) = e^x$ が $x = a$ でとる $f(a)$ の値は、そこに接する接線の傾きを表していることになる。

以前 $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ の展開において

$$1 + n \cdot \tfrac{1}{n} + \tfrac{n(n-1)}{2!} \cdot \tfrac{1}{n^2} + \tfrac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \tfrac{1}{n^3} + \cdots + \tfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\{n-(n-1)\}}{n!} \cdot \tfrac{1}{n^n}$$

を導いたことを覚えているだろうか。このことから $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ を展開すると

$$1 + n \cdot \tfrac{x}{n} + \tfrac{n(n-1)}{2!} \cdot \tfrac{x^2}{n^2} + \tfrac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \tfrac{x^3}{n^3} + \cdots + \tfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\{n-(n-1)\}}{n!} \cdot \tfrac{x^n}{n^n}$$

となるはずであるから、最終的に

$$1 + x + \left(1 - \tfrac{1}{n}\right) \cdot \tfrac{x^2}{2!} + \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)\left(1 - \tfrac{2}{n}\right) \cdot \tfrac{x^3}{3!} + \cdots + \underline{\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)\left(1 - \tfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \tfrac{n-1}{n}\right) \cdot \tfrac{x^n}{n!}} \qquad (☆)$$

が得られるであろう。

ところで $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \to e \quad (n \to \infty)$ であるから、$n = \dfrac{n}{x}$ に置き換えた $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}} \to e \quad (\dfrac{n}{x} \to \infty)$ も成り立つ。このことから

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left\{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right\}^x \to e^x \quad (n \to \infty)$$

がいえるであろう。

一方、$n \to \infty$ のとき $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ の展開を考えてみる。それは（☆）で $n \to \infty$ とすることであるから、

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

と考えてよいだろう。ただ、このことはすぐには分からないかもしれない。$n \to \infty$ のとき、たとえば $\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ などが 1 に収束しそうな気配はあるが、下線部が 1 に収束するようには見え

ないだろう。しかし、これでよいのである。その説明は難しいが、それでよいことは以上から得られる関係式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

が自ら語ってくれる。

等式の両辺を微分してみよう。ただし、これまで**無限級数**に対する微分については何も語ってこなかったし、乱暴なことは承知しているが、無限級数の微分は無条件に各項を微分することである。すると

$$\begin{array}{ccccccccc} (e^x)' & = & (1)' & +(x)' & +\left(\dfrac{x^2}{2!}\right)' & +\left(\dfrac{x^3}{3!}\right)' & +\cdots & +\left(\dfrac{x^n}{n!}\right)' & +\cdots \quad \text{より} \\ e^x & = & & 1 & +x & +\dfrac{x^2}{2!} & +\cdots & +\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} & +\cdots \end{array}$$

となる。無限の項があるので、微分後の式は微分前の式とまったく一致していることに注意してもらいたい。$(e^x)' = e^x$ であることは、ここからも納得できるのではないだろうか。