指数関数の微分

分数関数や三角関数の微分を手がけたので、残るは指数関数と対数関数の微分である。関数の種類は星の数ほどあろうが、基本的な関数はこれぐらいで打ち止めにしよう。

指数関数 $f(x)=a^x$ を考える。もちろん $a>0$ かつ $a\neq 1$ である。導関数を求める定義

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

に従って計算すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} && \text{（a^x に $x+\Delta x$ を代入）} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} && \text{（因数分解）} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}a^x\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} && \text{（書き直し）} \end{aligned}$$

というところまで変形できる。しかし、$\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$ は初めて見るものである。単純に $\Delta x=0$ と考えると、$a^0=1$ と定義されていたことを思い出せば、$\displaystyle\frac{0}{0}$ となって値を確定することができない。

Microsoft Excel で様子を探ってみよう。とりあえず $a=2$ の場合は以下のようになる。

◇	A	B	C	D	E	F
1	Δ x	(a^Δ x-1)/Δ x	a（適宜変更↓）			
2	0.1	(* **B2**)	2			
3	(* **A3**)	↓下へコピーする				
4	↓下へコピーする	↓				
5	↓	↓				
6	↓	↓				

※ セルの式
（**B2**） **=(C2^A2-1)/A2**
（**A3**） **=A2/10**

ある一定の値に収束しそうであるが、それが a の値とどう関係しているかは不明である。C2 セルの値を、たとえば 3 や 4 などに変えてみるとよい。やはり、一定の値に収束する様子が見えてくるものの、a との関連は不明のままである。やや暗礁に乗り上げた感じがするので、一旦ここを離れて対数関数に目を向けることにしよう。

対数関数の微分

対数関数 $f(x)=\log_a x$ を考える。これも定義に従って計算すると、

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x} && \text{（}\log_a x\text{ に }x+\Delta x\text{ を代入）}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x\} && \text{（分母を分子の前へ）}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right) && \text{（対数の性質）}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} && \text{（対数の性質）}
\end{aligned}$$

というところまで変形できる。これは指数関数に輪をかけて見通しが立ちそうにない結果である。

しかし、ひるまずに工夫をしてみよう。真数の値が $\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$ であるところに指数は $\frac{1}{\Delta x}$ であるから、式としては少々バランスを欠いている気がする。指数が $\frac{x}{\Delta x}$ ならば、真数に含まれる項と指数がちょうど逆数の関係になるので具合がよさそうである。そこで、多少技巧的ではあるが

$$\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

のように式を変形してみると、対数関数の導関数は

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

と書くことができる。これは、$\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$ の極限値の対数をとることになるので、結局

$$\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\to\ ?\quad(\Delta x\to 0)$$

の値を知ることができればよいことが分かった。

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ の極限値

x が有限の値をとる限り、$\Delta x\to 0$ のとき $\frac{\Delta x}{x}\to 0$、$\frac{x}{\Delta x}\to\infty$ である。$\frac{\Delta x}{x}$ や $\frac{x}{\Delta x}$ は正の実数値をとるが、ここでは n を自然数として $\frac{x}{\Delta x}=n$ とおくことにすれば $\frac{\Delta x}{x}=\frac{1}{n}$ である。この置き換えによって

$$\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\quad(\Delta x\to 0)\qquad\text{は}\qquad\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\quad(n\to\infty)$$

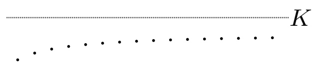
に見直して考えることができるようになる。$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ の振る舞いは Microsoft Excel で調べてみよう。

◇	A	B	C	D	E	F
1	n	(1+1/n)^n				
2	10	(* **B2**)				
3	(* **A3**)	↓下へコピーする				
4	↓下へコピーする	↓				
5	↓	↓				
6	↓	↓				

※ セルの式
（**B2**）　**=(1+1/A2)^A2**
（**A3**）　**=A2*10**

これを見ると 2.7 程度の数に収束するように思える。これが本当に収束することはきちんと示しておきたい。ところで、$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ に $n=1,\,2,\,3,\,\ldots$ と代入したときの値を $a_1,\,a_2,\,a_3,\,\ldots$ で表した場合、数列 $\{a_n\}$ が収束することはどのように示せばよいのだろうか。

$\{a_n\}$ は Excel で調べる限り、増加する数列のようである。増加する数列が収束する条件は、$\{a_n\}$ がある値 K を超えないことである。



これは図を見ると直感的に明らかに思えるが、実はそれほど自明というわけではないのである。しかし、ここでは直感に頼ることにする。

*　*　*

数列の収束に関しては、本来精密な議論を必要とする。ここでは単に、増加する数列 $\{a_n\}$ が収束するためには、ある項から先の数列に対して

$$a_n < a_{n+1},\quad a_n < K \quad (※)$$

が要求されることだけ指摘し、これを鵜呑みにしてもらっている。$<$ は $\leq$ と書くほうが実情に合うが、ここでは余り細かいことに立ち入らない。ところで $a_n < a_{n+1}$ が常に成り立てば、いずれ a_n は K を超えてしまうように思えるが、

$$1.9,\ 1.99,\ 1.999,\ 1.9999,\ 1.99999,\ \ldots$$

のような数列は常に $a_n < a_{n+1}$ であっても、決して 2 を超えない。また、小数点以下の数字が任意に増える数列

$$3.14,\ 3.141,\ 3.1415,\ 3.14159,\ 3.141592,\ \ldots$$

が一定の値に収束するのかという疑問が浮かぶかもしれない。これらはいずれも、実数についてきちんと理解をした上でないと、納得しがたいものがある。収束とは、そのような考えが土台になっているので、（※）が収束することを証明するのは別の機会にするしかない。▮

さて、$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ が一定の値に収束することを示すには、（※）をいえばよいことになる。すなわち

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{および} \quad a_n < K$$

を示せばよい。

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ を示すのは、数式の計算に慣れた者でも少々面倒なものであるから、計算が苦手な場合は軽く読み流してもらいたい。まず、$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ を**二項定理**によって展開しておく。

$$1 + {}_nC_1\left(\frac{1}{n}\right) + {}_nC_2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + {}_nC_3\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + {}_nC_n\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

ここで ${}_nC_r$ を n を用いた数式に直しておくと

$$1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\{n-(n-1)\}}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

であるが、とくに最後の項が $\dfrac{1}{n^n}$ で済むはずなのに、余計な記述になっているのは意味がある。それは、各項の分母を取り替えて

$$1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{n^2}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}\cdot\frac{1}{3!} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\{n-(n-1)\}}{n^n}\cdot\frac{1}{n!}$$

とすれば、分母の n^r がひとつずつ分子の n と約分でき

$$1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!} \qquad (☆)$$

となる。最後の項を余分な記述にしたのは、先頭の項から末尾の項まで同じ形で表したかったためである。

同じことを $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ に対しても行ってみよう。まず、展開である。

$$1 + {}_{n+1}C_1\left(\frac{1}{n+1}\right) + {}_{n+1}C_2\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + {}_{n+1}C_3\left(\frac{1}{n+1}\right)^3 + \cdots + {}_{n+1}C_n\left(\frac{1}{n+1}\right)^n + {}_{n+1}C_{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

ここで ${}_nC_r$ を n を用いた数式に直した上で、先ほどと同じく各項の分母を取り替えて

$$\begin{aligned}&1 + (n+1)\cdot\frac{1}{n+1} + \frac{(n+1)\{(n+1)-1\}}{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{(n+1)\{(n+1)-1\}\{(n+1)-2\}}{(n+1)^3}\cdot\frac{1}{3!} + \cdots \\ &\quad + \frac{(n+1)\{(n+1)-1\}\{(n+1)-2\}\cdots\{(n+1)-(n-1)\}}{(n+1)^n}\cdot\frac{1}{n!} + \frac{(n+1)\{(n+1)-1\}\{(n+1)-2\}\cdots\{(n+1)-n\}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{1}{(n+1)!}\end{aligned}$$

とすると、ここでも分母の $(n+1)^r$ がひとつずつ分子の $n+1$ と約分でき

$$\begin{aligned}&1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\frac{1}{3!} + \cdots \\ &\quad + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\frac{1}{n!} \underline{+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{(n+1)!}} \qquad (★)\end{aligned}$$

となることが分かる。

（☆）と（★）の違いはなんであろう。まず、（★）は下線部が 1 項多いことに注意しよう。この項はもちろん正の値であるから、（☆）$<$（★）を示したい我々には都合がよい。あとは最初の

$1+1$ を除いて、各項のそれぞれについて（☆の項）<（★の項）を示すことができればよい。各項は $\dfrac{1}{k!}$ という形は同じであるから、その前の係数の大小を比較する。係数はいずれも

$$\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)\left(1-\frac{3}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{N}\right)$$

の形をしており、違いは分母 N が n と $n+1$ であることだけである。どちらの係数が大きいだろうか。それは分母に $n+1$ を持つ方である。ゆえに（☆）<（★）、すなわち

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

がいえた。

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$

始めに、（☆）は $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ の展開式であるから

$$a_n = 1+1+\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\tfrac{1}{2!}+\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\left(1-\tfrac{2}{n}\right)\tfrac{1}{3!}+\cdots+\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\left(1-\tfrac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\tfrac{n-1}{n}\right)\tfrac{1}{n!}$$

とおくことにする。さて、a_n の展開式において、各項の $\dfrac{1}{k!}$ の前に掛けてある数はどれも 1 より小さいので、これらをすべて取り除いてしまえば和は a_n より大きくなる。すなわち

$$a_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

が成り立つ。ここで、各項の分母の $k!$ に目を向けよう。$k! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots k$ であるから、3 から k までの数をすべて 2 に変えた $1\cdot 2\cdot 2\cdots 2 = 2^{k-1}$ は $k!$ より小さい。すなわち $\dfrac{1}{k!} < \dfrac{1}{2^{k-1}}$ がいえて

$$a_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

成り立つ。右辺の第 2 項から先は初項 1、公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比級数であるから、$n\to\infty$ のとき $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ となる。これより $a_n < 1+2 = 3$ がいえたわけである。先の結果と合わせて、結局

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < 3$$

であることが示された。ゆえに、数列 $\{a_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ は収束し、極限値を持つといえるのである。