$\boldsymbol{\dfrac{1}{x}}$ の導関数

関数を微分することで、関数のグラフの形状を知ることができるのはすばらしいことである。ただ、いまのところグラフの形状を知ることができるのは

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

のように、多項式で表された関数だけである。なぜなら、いまのところ微分することができる関数は x^n に限るからである。ここからしばらくは、いろいろな関数の導関数を求めることにしよう。

最初は反比例の関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ を考える。導関数を求める定義

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

にしたがって計算すると、

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} && (\tfrac{1}{x}\text{に } x+\Delta x \text{ を代入}) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}\right) && (\text{商を積の形に}) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{x-(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)x} && (\text{通分}) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{-\Delta x}{(x+\Delta x)x} && (\text{分子を整理}) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(x+\Delta x)x} && (\text{約分})
\end{aligned}$$

のように変形できる。計算自体は分数計算を丁寧に行っているだけなので、目で追うだけで理解できるであろう。ここで $\Delta x \to 0$ とすると $-\dfrac{1}{x^2}$ となるので

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

という結果を得る。

$\boldsymbol{\sqrt{x}}$ の導関数

次に $f(x) = \sqrt{x}$ の導関数を計算しよう。定義にしたがって計算を始めると

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

であるが、根号があってこの先の計算がやりにくくなっている。このようなときに使える技法が**分子の有理化**である。するとこの先の計算は

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} && (\sqrt{x}\text{に } x+\Delta x \text{ を代入}) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} && (\text{分子を有理化}) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} && (\text{分子を展開}) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} && (\text{分子を整理})
\end{aligned}$$

となる。ここで $\Delta x \to 0$ とすると $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ となるので

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

という結果を得る。

$\sin x$ の導関数

続いて三角関数の導関数を求めよう。まず、$f(x) = \sin x$ である。定義にしたがって計算を始めると

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

であるが、三角関数は扱いが難しい。一見するとこの先の計算は無理そうに思えるが、三角関数には加法定理と呼ばれる公式

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

があるので、これを $\sin(x+\Delta x)$ に適用すると

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x\cos\Delta x + \cos x\sin\Delta x - \sin x}{\Delta x} && (\text{加法定理による}) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x(\cos\Delta x - 1) + \cos x\sin\Delta x}{\Delta x} && (\text{分子を整理}) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x(\cos\Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x\sin\Delta x}{\Delta x} && (\text{式を分割}) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \sin x\frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \cos x\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} && (\text{書き直し})
\end{aligned}$$

となる。ここで問題になるのは、$\Delta x \to 0$ のときの $\dfrac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x}$ と $\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}$ の値である。$\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x} = 1$ であることはすでに述べた。

また、$\dfrac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}$ は分子を有理化することで

$$\frac{(\cos\Delta x-1)(\cos\Delta x+1)}{\Delta x(\cos\Delta x+1)}=\frac{\cos^2\Delta x-1}{\Delta x(\cos\Delta x+1)}=\frac{\sin^2\Delta x}{\Delta x(\cos\Delta x+1)}=\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\frac{\sin\Delta x}{\cos\Delta x+1}$$

となるが、最後に現れた式は $\Delta x\to 0$ のとき $\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1$、$\dfrac{\sin\Delta x}{\cos\Delta x+1}=0$ なので、結局 $\dfrac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}\to 0$ であることが分かる。したがって $\Delta x\to 0$ のとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\sin x\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\cos x\frac{\sin\Delta x}{\Delta x} \\ &= \sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1 \\ &= \cos x \end{aligned}$$

である。以上で

$$\boxed{(\sin x)'=\cos x}$$

という結果を得る。

$\cos x$、$\tan x$ の導関数

$f(x)=\cos x$ の導関数も $\sin x$ と同様にできる。しかし、ここでは別の方向から考えてみよう。$\sin x$ の導関数が $\cos x$ であるということは、$\sin x$ の接線の傾きが $\cos x$ で表されるということでもある。それは $\sin x$ の $x=a$ における接線の傾きが $\cos a$ であることを意味し、また $x=a+\dfrac{\pi}{2}$ における接線の傾きが $\cos\left(a+\dfrac{\pi}{2}\right)$ であることを意味する。すなわち、任意の $x+\dfrac{\pi}{2}$ において

$$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad f'(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\qquad (※)$$

であるといっている。

ところで sin と cos には

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x,\quad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$$

という関係があった。このことから（※）は

$$f(x)=\cos x\quad\Rightarrow\quad f'(x)=-\sin x$$

と書き換えてよい。結局、$\cos x$ の導関数が

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$

であることが分かった。

また、$f(x) = \tan x$ の導関数も定義にしたがって計算してもよいのだが、ここでは微分の性質

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

を使うのがよい。$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ であるから

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

が直ちに分かる。これより $y = \tan x$ の導関数は

$$\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

であることが分かった。