$\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ の極限

この後、三角関数の微分を行うにあたって必要なことがあるので、ここで述べておきたい。以前、θ をラジアンで考えると、$\sin\theta \approx \theta$ であることを指摘しておいた。そのことを実感するためには Microsoft Excel でシミュレートしてみるとよい。

◇	A	B	C	D	E	F
1	θ（度）	θ（ラジアン）	sin θ			
2	2	（※ B2）	（※ C2）			
3	1	↓下へコピーする	↓下へコピーする			
4	0.5	↓	↓			
5	0.1	↓	↓			
6	0.01	↓	↓			

※ セルの式
（B2）　=RADIANS(A2)
（C2）　=SIN(B2)

ここでは、2（度）から始めて小さな角度をセルに入力しているが、この程度の大きさの角度でも θ と $\sin\theta$ の値はかなり近い。0.01（度）程度から下の角度になってくると、セル幅にもよるが θ（ラジアン）と $\sin\theta$ の列には同じ値が並ぶであろう。$\sin\theta \approx \theta$ であることは、比にすると $\dfrac{\sin\theta}{\theta} \approx 1$ であることを意味している。

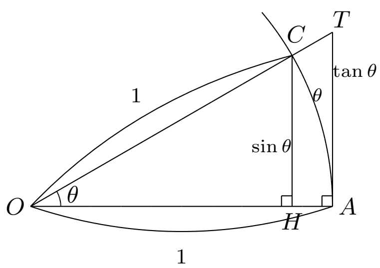
$\theta = 0$ ならば $\sin 0 = 0$ であるから、$\dfrac{\sin\theta}{\theta} = \dfrac{0}{0}$ は定義されない。そこで $\theta \to 0$ を考えるのである。Excel による確認では

$$\boxed{\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1 \quad (\theta \to 0)}$$

であることが示唆されている。では、このことを証明しておこう。

$\dfrac{\sin\theta}{\theta} \to 1 \quad (\theta \to 0)$ の証明

$\sin\theta \approx \theta$ を証明する際によく使われる図を使って説明しよう。



図は、半径 1 の円 O から、中心角が θ のおうぎ形 OAC を抜き出していると見てもらいたい。CH は C から円の半径 OA に下ろした垂線である。定義より $CH = OC\sin\theta$ であるが、$OC = 1$ より $CH = \sin\theta$ であることも注意しておこう。また、定義より $TA = OA\tan\theta$ であるが、$OA = 1$ より $OA = \tan\theta$ であることも注意しておこう。

さて、図では O の周りに角 θ を示しているが、弧度法の定義では、角の大きさは半径 1 の円の弧長であったことを思い出してもらいたい。すると、弧 CA の長さが θ である。

図から直ちに

$$CH < \text{弧}\, CA\text{、すなわち}\ \ \sin\theta < \theta$$

が分かる。なぜなら、CH は C から線分 OA に下ろした垂線であり、CA は C から線分 OA に引いた曲線であるからだ。いずれも同じ点 C から同じ線分 OA へ引いた線だが、点と直線の距離は垂線が一番短い。したがって、明らかに CH は CA より短い。

次に CA と TA の長さを比較したい。図を見ると何となく $CA < TA$ であるように見える。しかし、このことはそれほど明らかなことではないのである。実際 $CA < TA$ であるのだが、それをきちんと示すのは難しい。ただ、$CA < TA$ を認めるなら

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta \quad \text{（※）}$$

が成り立つことになる。$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ であるから、（※）の全体を $\sin\theta$ で割れば

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

を得るが、逆数で見る方が極限を考えやすい。$\dfrac{\theta}{\sin\theta}$ も $\dfrac{1}{\cos\theta}$ も 1 より大きいことに注意すると、逆数をとると大小関係は逆転する。よって

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \quad \text{（☆）}$$

である。

ここで $\theta \to 0$ とすると、$\cos\theta \to 1$ であるから

$$\frac{\sin\theta}{\theta} \to 1 \quad (\theta \to 0)$$

が示された。

* * *

（☆）は単なる不等式であるから、$\theta \to 0$ の極限を考えて $\cos\theta \to 1$ となったとき

$$\underline{1} < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

となることがおかしいと感じるかもしれない（$\underline{1}$ は $\cos\theta \to \underline{1}$ を区別するために下線を書いてある）。だとしたら、ふつうの不等式と極限を考慮した不等式を混同している。これは極限を考慮した不等式であるから、何ら不備はないのである。ここで右辺の 1 は寸分の違いもない 1 である。しかし左辺の $\underline{1}$ は $\cos\theta$ の極限値としての値が 1 なのであって、$\cos\theta$ の値自体が 1 になっていることを示したのではない。このことを確認するには、Microsoft Excel を使うのがよい。

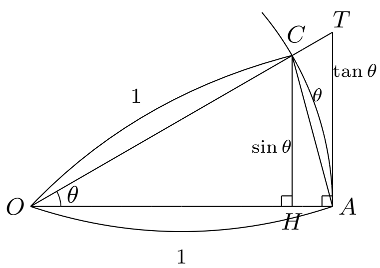
◇	A	B	C	D	E	F
1	θ（ラジアン）	cos θ	sin θ / θ			
2	0.1	（※ **B2**）	（※ **C2**）			
3	0.09	↓下へコピーする	↓下へコピーする			
4	0.08	↓	↓			
5	0.07	↓	↓			
6	0.06	↓	↓			

※ セルの式
（B2）　=COS(RADIANS(A2))
（C2）　=SIN(RADIANS(A2))/RADIANS(A2)

θ を 0 に近づける過程で、$\cos\theta$ と $\dfrac{\sin\theta}{\theta}$ はいずれも 1 に近づくことが確認できる。しかし、どの行を見ても $\cos\theta < \dfrac{\sin\theta}{\theta} < 1$ であるはずだ。この状況を式に表したものが（☆）だったのである。▮

循環論法的証明

$\dfrac{\sin\theta}{\theta} \to 1 \quad (\theta \to 0)$ の証明においては、線分の長さにやや不確かな点があり、証明としては完璧なものではない。それを嫌って、たいていの教科書は面積を用いて証明を試みている。もう一度、図を見ることにしよう。ここでは、線分 CA を書き加えてある。



図形の面積をもとにすると、明らかに

$$\triangle OCA < \text{おうぎ形}\, OCA < \triangle OTA$$

である。三角形の面積やおうぎ形の面積は公式があるので、上の関係は

$$\frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \sin\theta < \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{\theta}{2\pi} < \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \tan\theta$$

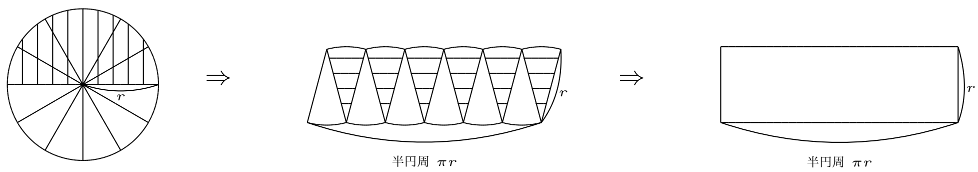
である。おうぎ形の面積は、円周に占める中心角の割合で決まるので、円周 2π に対して中心角が θ であることに注意されたい。

これを整理すると、やはり

$$\sin\theta < \theta < \tan\theta$$

を得るので、以下は先ほどと同じ証明になる。

こちらの方法なら大小関係に紛れがないように見えるが、実際はそうではない。それは、半径 r の円の面積を求める公式は πr^2 として小学校以来使ってきているが、これが正しいことをきちんと証明してはいない。円の面積の公式が正しいことを示すには、積分を待たなければならない。そして積分で使われる計算式は、$\dfrac{\sin\theta}{\theta} \to 1 \quad (\theta \to 0)$ が土台になっているのである。つまり、証明すべきことを円の面積の公式を用いてするのだが、円の面積の公式は証明すべきことが正しい前提で求められているのである。これは循環論法に陥っている。面積を用いて $\dfrac{\sin\theta}{\theta} \to 1$ を証明する方法が不十分と言われることがあるのは、これが理由である。



ただ小学校のときに習う、円を細かいおうぎ形に分割して、噛み合わせてできる図形から円の面積を求める方法は、極限の概念がきちんとできていれば悪いことはない。噛み合わせた図形の極限が長方形であることが証明できればよいからだ。したがって、円の面積を積分を使って求めていないという理屈で、教科書的には面積を用いた証明が使われるのだろう。