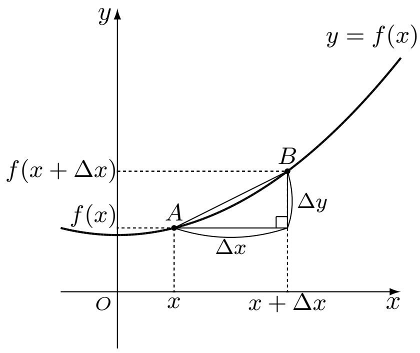
微分の意味

平均変化率から始まった関数の変化の考察は、平均変化率の極限である導関数までたどり着いたことになる。ある関数の導関数を求めることを微分すると言ったのだが、この段階まで来ると $(x^n)' = nx^{n-1}$ のような簡単な公式が前面に出てきて、微分とはたとえば $f(x) = x^3$ ならば $f'(x) = 3x^2$ になるという結果しか気にならなくなるのである。

あえて、再び微分とは何かを確認しておこう。



関数の変化をとらえるとき、2 点 A、B をごく小さな区間にとって直線的な変化を見ることにすれば、実際の関数 $f(x)$ の変化に近いものを観察できるであろう。これまでは小さな区間の幅を h で表してきたが、変化の増分という意味を強く表すために記号 Δ を用いて、x 軸方向の増分を Δx で、y 軸方向の増分を Δy と表すことにする。すると AB 間の平均変化率は

$$\text{平均変化率} = \frac{y\text{ の増分}}{x\text{ の増分}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

のように簡単に書けることになって、その極限である関数の微分は

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (※)$$

という意味をもっていることは前にも述べた。このことを $y = f(x)$ に当てはめて再び微分の定義を書くと

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

となるだろう。

これまでは関数を微分した場合、もとの関数と区別するために記号 $'$ をつけてきた。しかし、微分が平均変化率の極限であることを強調するなら、(※) を記号化して $\dfrac{dy}{dx}$ と書くのも悪くない。む

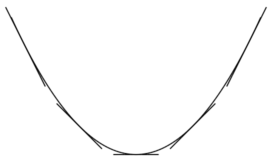
しろ微分の本来の意味を含んでいてよい気がする。そこで、これからは状況に応じて、$f'(x)$ の他に y' や $\dfrac{dy}{dx}$ 表現を使うこともあるだろう。

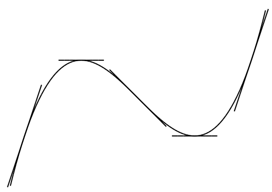
* * *

$\dfrac{dy}{dx}$ は表現であって記号でない。こう書くと変な誤解を生むかもしれないが、そのようなとらえ方をする理由は $\dfrac{dy}{dx}$ が $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ を意味することに起因する。Δy は Δx の変化に影響を受けるので、$\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y$ と書いても意味を持つ。それは dy だけでも意味を持つことに通じるので、仮に $\dfrac{dy}{dx}=\alpha$ だとしたら、$dy=\alpha dx$ と見てよい。このような扱いはいずれすることになる。$\dfrac{dy}{dx}$ が単なる記号であるという固定観念を抱かないための予防として、ここで話をしておいた。▮

グラフの増加と減少

関数を微分すると何が分かるようになるのだろうか。関数の微分が微分係数を求めること、すなわち接線の傾きを求めることにつながることは前に述べた。では、接線の傾きは何を示しているのだろうか。それは、いろいろな曲線について、様々な x の位置で接線を引いてみるとよく分かる。





例示した 2 種類の曲線について接線を見ると、接線が右上がりになっているところ、右下がりになっているところ、水平になっているところがある。接線が右上がりになっているところでは、グラフは増加している。接線が右下がりになっているところでは、グラフは減少している。そして接線が水平になっているところは、グラフの増加/減少の境であることが分かるであろう。つまり接線の傾きを知ることで、もとの関数の増加や減少の具合がおよそ分かるのである。

およそ分かるというのは、たとえば左の図で接線が右下がりになっている部分を見ると、グラフは常に減少状態にあるのだが、減少の仕方は始めは急で次第に緩やかになっているのに対し、右の図の減少部分は、減少の仕方が次第に急になって再び緩やかになっていくというように、多少の違いがあるからだ。また、接線の傾きが水平でもそこが増加/減少の境ではない場合や、関数が常に減少しても際限なく減少しない場合があるなど、傾きを知ることで何もかもが分かるわけではない。接線の傾きを調べることはグラフの形状を知る上で有効な手段ではあるが、万能ではないことを注意しておこう。

増減表

関数のグラフの増減を調べるために、**増減表**が使われることがある。具体的に $f(x) = x^3 - 3x$ について、関数の増減の様子を調べてみよう。

まず、増減を調べるために $f(x)$ を微分して

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

を求める。因数分解したのは、$f'(x) = 0$ となる x の値を浮かび上がらせるためである。これより、$x = -1, 1$ が分かるので、ここで接線が水平になっていることを知ることができる。ここは一般に増加/減少の境目であるから、その前後で接線の傾きは常に正か常に負かのいずれかになる。実際、$x < -1$、$-1 < x < 1$、$1 < x$ のそれぞれの範囲で、$f'(x)$ の値は順に、正、負、正であることが分かる。このことは、たとえば $x < -1$ としたとき $(x+1) < 0$、$(x-1) < 0$ であるから積が正になると考えてもよいし、もっと単純に $x = -3$ などの具体的な数値を代入して確かめてもよい。以上のことから、x がとる値による $f'(x)$ の正負を以下のような表にまとめることができるのである。

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

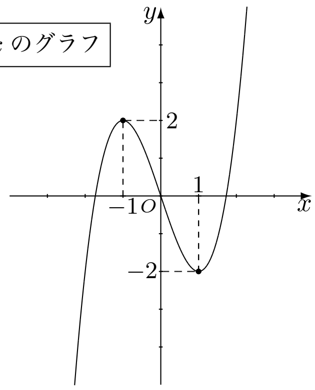
関数の増減の様子が明らかになると、関数のグラフが描けるようになる。しかし関数のグラフを描くには、これだけの情報では心もとない。そこで多くの場合、増減表には適当な x の値に対する $f(x)$ の値を書き加えることにしている。適当な x の値といっても、増減表で明確になっている x の値は $f'(x) = 0$ となるときのものなので、それを利用するのが簡単でよい。また、その前後では x を特定できないので、$f(x)$ の値も確定できない。そのため、$f(x)$ の値を書き加える代わりに、グラフの形状を $\nearrow$ か $\searrow$ で表すのが習慣である。以上のことから、増減表は以下のように完成する。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

1 行目の x の値や範囲は簡略化してある。それでも分かるからである。何が分かるかというと、$x = -1$ を境に関数は増加から減少に変わり、そのときの $f(x)$ の値が 2 であることと、$x = 1$ を境に関数は減少から増加に変わり、そのときの $f(x)$ の値が -2 であることである。このようなとき、関数 $f(x)$ は $x = -1$ で**極大値** 2 をとり、$x = 1$ で**極小値** -2 をとる、という。極大値や極小値はあくまでも増加と減少の境目を指す言葉なので、必ずしも (極大値) $>$ (極小値) であるわけではない。いずれ登場するが、(極大値) $<$ (極小値) という例もふつうに存在する。

関数のグラフ

さて、増減表程度の情報でグラフはだいたい描けることを示しておこう。実際、いまの例ではグラフは以下のようになる。



$f(x) = x^3 - 3x$ のグラフ

増減表だけでグラフが描ける理由は、私たちに、関数のグラフというものは**なめらかな**線でつながっているという常識があるからである。もちろん常識はずれの関数はあるので、その場合は増減表だけでは不足であるし、常識的な関数であっても増減表だけの情報ではグラフの形状が分からないことも多い。そのような例は、しばらく後で登場することになる。