極限の性質

これまで行ってきた極限値の計算、すなわち $h \to 0$ に関する計算は、便宜上 h に 0 を代入することと何ら変わりない方法で行った。しかし、それは計算上問題ない例を用いたためで、あらゆる極限値計算に適用できるわけではない。また $\displaystyle\lim_{h\to 0}(2a+h) = 2a$ であったが、$\displaystyle\lim_{h\to 0} 2a = 2a$、$\displaystyle\lim_{h\to 0} h = 0$ なので、この場合は

$$\lim_{h\to 0}(2a+h) = \lim_{h\to 0} 2a + \lim_{h\to 0} h$$

が成り立っている。このような性質はどんなときでも成り立つだろうか。

こういったことを確認するには、$\displaystyle\lim_{h\to 0}(2a+h) = 2a$ をもっと正確に定式化しなくてはならない。単に「h はほとんど 0 に等しいのだから、h は 0 と考えて差し支えない」的な考えでは数学が瓦解してしまうのである。

ただこの段階で、蟻が這い入る隙間もないほど厳密な理論を展開するのは、これから野外でバーベキューを始めようというときに、材料の重さや大きさをきちんと計量するような、無粋なまねをするようなものだろう。$h \to 0$ であることの定式化は後の適切な時期に回し、いまは磊落（らいらく）に食事を楽しむことにしよう。

微分の性質

ここに $y = f(x)$、$y = g(x)$ という関数があるとしよう。これらの導関数は記号 $'$ を用いて表せば、$y' = f'(x)$ や $y' = g'(x)$ と書かれることになる。

このとき $y = f(x)+g(x)$ のような関数も考えることができる。では、この場合 $y' = f'(x)+g'(x)$ だろうか。そんなことは当たり前だと思うだろう。なぜなら、$f(x)$ に対する導関数が $f'(x)$ で $g(x)$ に対する導関数が $g'(x)$ なら、$f(x)+g(x)$ に対する導関数は $f'(x)+g'(x)$ に決まっていると。

しかし、その考えは数学ではない。$f(x)$ に対する導関数が $f'(x)$ なら、$f(x)+g(x)$ に対する導関数は $\{f(x)+g(x)\}'$ である。なぜなら、それが定義だからだ。では、

$$\{f(x)+g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$$

でよいと思うだろうが、記号 $'$ が**線形性**を保つことはどこにも触れていなかったはずだ。

それでは、何を拠り所にして示すかといえば、これまでに触れた導関数の唯一の定義

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

しかないのである。したがって $\{f(x)+g(x)\}'$ というのは

$$\{f(x)+g(x)\}' = \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h}$$

のことを意味している。ところでこの式は、分子の計算順序を入れ替えると

$$\{f(x)+g(x)\}' = \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}+\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$

となる。分子を 2 項に分けて書けば

$$\{f(x)+g(x)\}' = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\{f(x+h)-f(x)\}}{h}+\frac{\{g(x+h)-g(x)\}}{h}\right] = f'(x)+g'(x)$$

ということになるのである。$f(x)+g(x)$ を $f(x)-g(x)$ にすれば $f'(x)-g'(x)$ も導けるので、導関数については

$$\boxed{\begin{aligned}\{f(x)+g(x)\}' &= f'(x)+g'(x)\\ \{f(x)-g(x)\}' &= f'(x)-g'(x)\end{aligned}}$$

という性質が成り立つのである。このことは、同時に

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{\{f(x+h)-f(x)\}}{h}+\frac{\{g(x+h)-g(x)\}}{h}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$

であることも示したことになっている。

ここまでの手順が過剰に無駄な議論だと思っていたとしたら待ってほしい。次に示したい性質は $\{f(x)g(x)\}'$ についてだからである。これは 2 つの関数の積であるから、拙速な考えではそれは $f'(x)g'(x)$ であるはずだ。ところがそうでないから慎重な議論が必要なのである。$\{f(x)g(x)\}'$ は導関数の定義では

$$\{f(x)g(x)\}' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

のことを意味している。ここで少し技巧的かもしれないが分子を

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

としてみよう。第 2 項と第 3 項で $f(x)g(x+h)$ を引いて足しているので、式の値に変化はない。すると式は

$$\begin{aligned}\{f(x)g(x)\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h} && \text{(因数分解)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h} && \text{(線形性)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} && \text{(書き直し)}\end{aligned}$$

のようにまとめることができる。では、最後の式において $h \to 0$ を計算してみよう。その際、$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ と $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ は定義よりそれぞれ $f'(x)$ と $g'(x)$ であり、その他は $h=0$ の代入と変らないので、結局

$$\boxed{\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

であることが分かる。関数が積の形の場合は、導関数は単純な形ではないのである。

関数が積の形である導関数の次は、関数が商の形の導関数を考えるのが自然な流れである。しかし、その前に関数の逆数 $\dfrac{1}{g(x)}$ の形の導関数を考えることは意義あることなので、これを調べよう。定義より

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right\}$$

を考えることになる。右辺を通分して形を整えることで

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\frac{-1}{g(x+h)g(x)}$$

を得るが、定義と $h \to 0$ の代入処理から

$$\boxed{\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$$

であることが分かる。

これが分かると、関数が商の形をしているときは商を積に見直して、積の形の導関数の性質を用いればよいので

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' &= \left\{f(x)\frac{1}{g(x)}\right\}' && \text{(商を積の形に)}\\
&= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' && \text{(積の導関数)}\\
&= f'(x)\frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} && \text{(逆数の微分)}\\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} && \text{(通分)}
\end{aligned}$$

と計算ができる。すなわち

$$\boxed{\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$$

である。

さて、こうなるとあらゆる性質は定義から正確に導かなくては信用ならないことになる。たとえば関数 $g(x)$ の定数倍である $kg(x)$ の導関数は何であろうか。これは $f(x)=k$ である定数関数と

$g(x)$ の積であると見て

$$\{kg(x)\}' = (k)'g(x) + kg'(x)$$

とすればよいだろう。定数の導関数 $(k)'$ が 0 になることを思い出せば、$\{kg(x)\}' = kg'(x)$ となって予想を裏切らない結論となった。関数 g は関数 f に読み替えて

$$\boxed{\{kf(x)\}' = kf'(x)}$$

と書くことにしよう。

性質の確認

大した方法ではないが、微分の性質を確認してみよう。$f(x) = x^3$ のとき $f'(x) = 3x^2$ であることは分かっている。x^3 を $x^2 \cdot x$ や $\dfrac{x^4}{x}$ と見て微分してみたい。

$$\begin{aligned}
(x^2 \cdot x)' &= (x^2)'x + x^2(x)' \\
&= 2x \cdot x + x^2 \\
&= 3x^2\ . \\
\left(\frac{x^4}{x}\right)' &= \frac{(x^4)'x - x^4(x)'}{x^2} \\
&= \frac{4x^3 \cdot x - x^4}{x^2} \\
&= \frac{3x^4}{x^2} \\
&= 3x^2\ .
\end{aligned}$$

当然のことながら、積の微分も商の微分もきちんと機能していることが分かる。