微分係数

平均変化率の極限という考えを導入したことにより、関数 $y=f(x)$ のある点における接線の傾きを計算することができるようになった。しかし、ある点における接線の傾きを計算する際、いちいち具体的な数値で計算するのも面倒である。x の値が 1 であろうが 2 であろうが、計算の方法はまったく同じなのだから、$x=a$ と考えて計算しても同じことである。たとえば $f(x)=x^2$ に関していえば

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-x^2}{h} && (x^2 \text{に } a+h \text{ を代入})\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} && (\text{展開})\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(2a+h)}{h} && (\text{整理して因数分解})\\
&= \lim_{h\to 0}(2a+h)=2a && (\text{約分して } h\to 0)
\end{aligned}$$

となる。このことから、$x=1$ における接線の傾きなら $a=1$ であるから 2、$x=2$ における接線の傾きなら $a=2$ であるから 4、というようにすぐに分かるのである。

この例のように、関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における接線の傾きを求める式 $f(a)$ を

$f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**と呼び、$f'(a)$ で表す

ことにする[1]。すなわち

$$\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

と定義しよう。

* * *

この時点では微分とは何であるかを明確にしないまま、微分係数という言葉が現れたのは、順序的に変な感じを持つかもしれない。接線の方程式を $y=mx+n$ とすれば、たしかに $f'(a)$ は m の値であるから x の係数になっている。だから、係数と呼ぶことに問題はないので、接線の傾きを強調するなら “接線係数” と呼んでもよいだろう。しかし微分係数は、微小区間における 2 点間を結ぶ直線の傾きを求めるものであった。そのような意味を尊重するなら “微傾数” などと呼んでもよいだろう。とはいうものの、微分することと微分係数を求めることは同じ計算に基づくものであるから、現在では微分係数に落ち着いたと思われる。▌

導関数

微分係数の計算を簡単に処理するために、具体的な数値を用いず $x=a$ として微分係数を求めてみた。このようにして求めた微分係数 $f'(a)$ は、任意の a について計算できることから、$f(a)$ は a

[1] $f'(a)$ は「f ダッシュa」と読むことが多い。英語では “f *prime* a”。英語で “*dash*” と言えば “—” を指す。

の関数になっているとみてよい。それなら、a を x に書き換えた $f'(x)$ を考える方が実情に合うように思える。すると、$x = a$ として微分係数を計算するところを x のまま計算してしまえば、それがそのまま微分係数を求めるための関数になるであろう。そのような考えで計算する

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

が、もっとも実情に合っているのである。このようにして求められた関数を**導関数（どうかんすう）**と呼ぶ。導関数とは、もとの関数から導かれた、接線の傾きを求める関数である。そして「関数 $f(x)$ の導関数を求めること」を「$f(x)$ を x で**微分する**」ということにする。

たとえば $f(x) = x^3$ であれば、導関数 $f'(x)$ は次のようにして求められる。

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} && \text{(導関数の定義)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} && \text{(x^3に $x+h$ を代入)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} && \text{(展開)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} && \text{(整理して因数分解)} \\
&= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 && \text{(約分して $h \to 0$)}
\end{aligned}$$

これより

$$\boxed{f(x) = x^3 \text{ のとき } f'(x) = 3x^2}$$

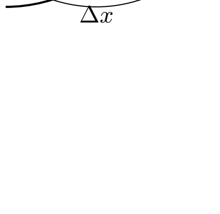
であることが分かるのである。導関数であることを表す記号に $'$ を用いてきたので、同じことを簡潔に

$$\boxed{(x^3)' = 3x^2}$$

と書いてもよい。

*　　*　　*

導関数を求める、または微分することを表す記号には多種多様なものがある。微分の元になる考えは平均変化率であり、その極限が微分係数となる。



$$平均変化率 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

平均変化率は $\dfrac{y\,\text{の変化量}}{x\,\text{の変化量}}$ であるが、それぞれの変化量を Δx、Δy で表すと、平均変化率 $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ と書ける[2]。Δx、Δy が微小になったものが微分係数であるから

$$\text{微分係数} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ということでもある。ふつう y は x の関数であるから、Δx の変化に応じて Δy も変化する。このことから $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ は、Δx、Δy が互いに関連し合っているひとつの塊と考えることもできる。そこで、$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ の略記に相当する $\dfrac{dy}{dx}$ を微分の記号として用いることも多い[3]。この場合は

$$y = x^3 \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

のように用いる。さらに $y = x^3$ であることを考慮して

$$\frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2 \text{ や } \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

のように書いてしまえば、より簡潔である。このようなことから $\dfrac{d}{dx}y$ や $\dfrac{d}{dx}f(x)$ などと書くこともある。▮

x^n の導関数

x^n の導関数を求めてみよう。$f(x) = x^n$ とおくと定義より

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \quad (x^n \text{に } x+h \text{ を代入})$$

であるので、$(x+h)^n$ が展開できればよいことになる。$(x+h)^n$ は

$$\underbrace{(x+h)(x+h)(x+h)\cdots(x+h)}_{n\text{ 個}} \quad (※)$$

である。ところで $(x+h)^3$ が $x^3 + 3x^2h + \cdots$ に展開できる理由は、$(x+h)(x+h)(x+h)$ の 3 個ある $(x+h)$ のそれぞれから、順に x, x, x を取って掛ければ x^3 の項ができ、順に x, x, h を取って掛ければ x^2h の項ができることによる。x^2h の項の係数が 3 であるのは、順に x, h, x を取って掛けても、順に h, x, x を取って掛けても x^2h の項ができるから、x^2h の項は合計 3 個になることに依る。

この考えを $(x+h)^n$ に当てはめてみよう。(※) の n 個ある $(x+h)$ のそれぞれから、順に x だけを取って掛ければ x^n の項ができる。これは n の値に関係なく成立することである。次は順に x か h を取って掛けるのだが、h を 1 個だけ含めて残りの $n-1$ 個は x を取って掛けることにする。

[2] Δ はギリシア文字の大文字で、“デルタ” と読む。

[3] $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は「Δx 分の Δy」と読むが、$\dfrac{dy}{dx}$ は「$dy\ dx$」と読むようである。

すると $x^{n-1}h$ の項ができるが、この項は n 個ある。なぜなら、1 番目の $(x+h)$ から h を取って他からはすべて x を取っても、2 番目の $(x+h)$ から h を取って他からはすべて x を取っても、$\ldots$、n 番目の $(x+h)$ から h を取って他からはすべて x を取っても $x^{n-1}h$ の項になる。この項が n 個あることは、いまの h の取り方から明らかだろう。したがって $nx^{n-1}h$ の項ができる。

この調子で、次は h^2 が含まれた項、h^3 が含まれた項、$\ldots$、h^n が含まれた項が順にできるが、他に x がいくつ掛けられているかとか、それらの項の係数がいくつかであるとかは一切無視してよい。理由はすぐ後で分かるので、とりあえず以降に現れる項には、不明な部分を $A, B, \ldots$ で代用して

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + Ah^2 + Bh^3 + \cdots + h^n$$

と表しておこう。そして再度 $f'(x)$ の計算に戻る。すると

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} && (x^n \text{に } x+h \text{ を代入}) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}h + Ah^2 + Bh^3 + \cdots + h^n) - x^n}{h} && (\text{展開}) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(nx^{n-1} + Ah + Bh^2 + \cdots + h^{n-1})}{h} && (\text{整理して因数分解}) \\
&= \lim_{h\to 0} (nx^{n-1} + Ah + Bh^2 + \cdots + h^{n-1}) = nx^{n-1} && (\text{約分して } h\to 0)
\end{aligned}$$

を得る。不明な部分を $A, B, \ldots$ で代用したのは、少なくとも 1 個の h が残るため、$h\to 0$ とすると不明な部分が消えてしまうからであった。

以上のことから

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$$

であることが判明した。

* * *

$f(x)=x$ を微分しようと思ったら、たったいま得た公式を使うと $f'(x) = 1x^{1-1} = x^0$ となる。もし定義に従って微分するなら

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

であるから、x^0 は 1 と考えないとつじつまが合わない。したがって

$$\boxed{(x)' = 1 \quad (\text{同時に } x^0 = 1 \text{ と定める})}$$

である。また、定数関数 $f(x)=c$（c は定数）を定義に従って微分すると

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

である。このことから定数 c においては

$$\boxed{(c)' = 0}$$

であることが分かる。▮