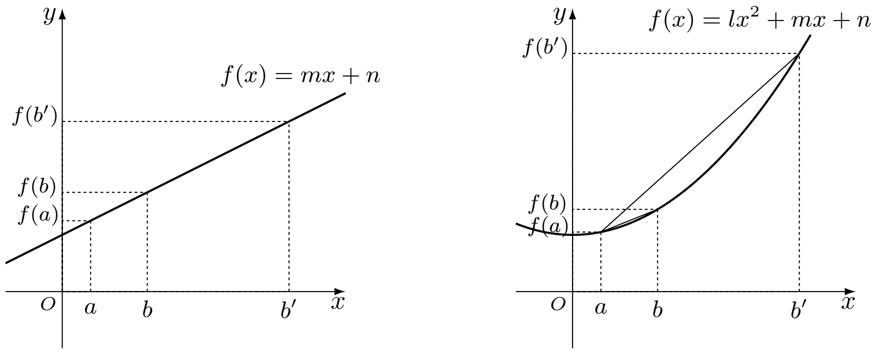
関数の変化

関数は、ある x の値に対する y の値を求めるだけでなく、x の変化に対する y の変化を見ることができる。ひとつの x に対してひとつの y を求めるのは、あらかじめ決められたことを調べるような、やや形式張った作業を感じさせるものがある。それに比べて x や y の変化を見るのは、予測がつかない状況を調べるような、何かつかみどころがない状況を思わせるものがある。x と y のこのような変化をばらばらに見たのでは、変化の奔放さが強調されるだけになってしまうだろう。そういったことを抑えて関数の振る舞いを知るには、x の変化と y の変化を比の形で見るとよい。そこで、関数の振る舞いを見出す手段として**平均変化率**を

$$\boxed{\text{平均変化率} = \frac{y\text{ の変化量}}{x\text{ の変化量}}}$$

で定義することにし、これを中心に関数の変化を追ってみよう。



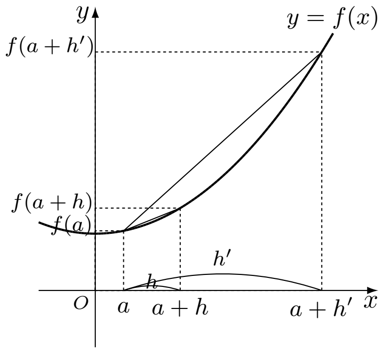
図は、1 次関数 $f(x) = mx + n$ と 2 次関数 $f(x) = lx^2 + mx + n$ のグラフの変化を、それぞれ表している。ここで、x の変化量とは x 座標の $x = a$ から $x = b$ までの変化を、y の変化量とは y 座標の $y = f(a)$ から $y = f(b)$ までの変化を指すものとすれば、平均変化率の定義は改めて

$$\boxed{\text{平均変化率} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

と書くことができる。

この式で $x = b$ の位置を $x = b'$ にして考えると、1 次関数では平均変化率が変わることはないが、2 次関数では平均変化率が変っていることが分かる。1 次関数の場合は平均変化率が直線の傾きを表すように、2 次関数の場合でも平均変化率が表すものは、2 点を結ぶ直線の傾きである。このことから、関数のグラフが直線でない限り平均変化率は一定しないといえる。すると、ただでさえ一定しない平均変化率を、任意の区間 $[a,\ b]$ において求めることは、足腰を安定させないで歩くような危うさを含んでいるように思える。それよりも、一方の x 座標は固定しておいて他方の

x 座標を動かすことにすれば、軸足をしっかり据えて、関数の変化を見られそうである。その上で固定した x 座標を様々に変えてみれば、本質的に任意の区間 $[a,\ b]$ の平均変化率を考えることと変わらないだろう。そこで $b = a + h$ と見て、b の位置は a を基準に見ることにしよう。



そのように考えると、x の変化量とは x 座標の値 a から値 $a+h$ までの変化を、y の変化量とは y 座標の値 $f(a)$ から値 $f(a+h)$ までの変化を指すことになるので、平均変化率の定義をさらに

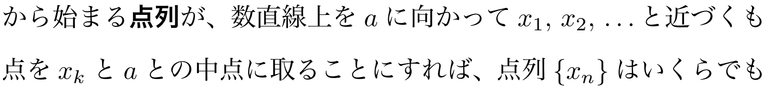
$$\boxed{\text{平均変化率} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

と書き直すことができる。

図で、h は h' に比べて $x = a$ に近い位置—すなわち、より狭い幅に—取ってある。これらの平均変化率は斜めの直線として図示されているが、平均変化率は幅が狭い方がグラフの変化に近くなっているのが分かるであろう。平均変化率が 2 点間を直線で測る以上、グラフの本当の変化に忠実になる保証はないが、それでも 2 点間の幅が狭いほどグラフの変化に近づくことが期待できる。それならば、幅を極端に小さくすれば平均変化率の計算をすることで、グラフの変化を近似できることになるだろう。

極限

現実の世界ではあり得ないことであるが、数学の世界ではある点に向かって**限りなく近づく**ことができる。



たとえば x_0 から始まる**点列**が、数直線上を a に向かって $x_1, x_2, \ldots$ と近づくものとする。このとき x_k の次の点を x_k と a との中点に取ることにすれば、点列 $\{x_n\}$ はいくらでも a に近づくこと

ができる。しかし、決して a にたどり着くことはない。近づき方は何も律儀に残りの距離の半分でなくても、x_k と a の間の適当な場所でかまわない。いずれにせよ、このような近づき方を、限りなく近づくと表現するのである。点列 $\{x_n\}$ が a に限りなく近づくことを、記号を用いて

$$x_n \to a \quad (n \to \infty)$$

のように表すことがある。これは x_n がとてつもなく先の方へ行ったとき、x_n の値がほとんど a に等しい状況を表している。

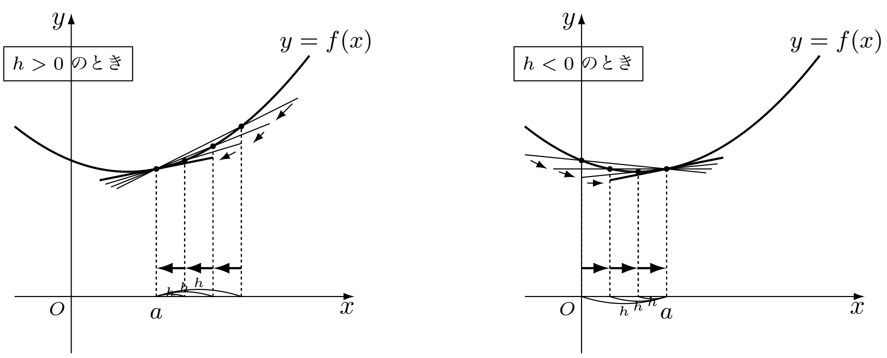
* * *

先ほどの例のように、2 点間の距離の半分に点を打ち続けることは理論的に可能なことであって、現実の世界でそのようなことが果たしてできるかどうかは分からない。それは、極限まで小さな物質が存在しないからというだけでなく、空間そのものを極限まで小さく分割できるかどうか分からないからである。しかし人の頭の中では、分割を無限に繰り返すことができる。そのことが記号を “=” と “→” で使い分けているのだろう。この場合、点列 $\{x_n\}$ は点 a に近づくが、決して x_n が a に重なることはない。▮

いま考えている**極限**とは、関数のグラフにおいて 2 点 $x = a$ と $x = a + h$ の間隔を限りなく 0 に近づけることである。それを $h \to 0$ で表し

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

の値がどうなるかを考えているのである[1]。



分母の h は x 軸方向の変化の量であり、分子の $f(a+h) - f(a)$ は y 軸方向の変化の量である。この比は直線の傾きを表すので、h を 0 に近づけるということは、非常に接近した 2 点間の直線の傾きを表すことになる。さらに h を極限まで 0 に近づければ、それほど接近した 2 点と 1 点の区別は難しくなってくるだろう。すると、2 点間を結ぶ直線も 1 点に接する接線も区別できないぐらいになっているに違いない。このような考えに沿えば、$\dfrac{y\text{ の変化量}}{x\text{ の変化量}}$ の極限値が表すものは、ある点における接線の傾きを表すといえるのである。

[1] lim は “リミット” と読む。

接線の傾き

具体的に $f(x)=x^2$ の $x=1$ における接線の傾きを計算してみよう。$f(x)$ の $x=a$ における接線の傾きは、定義より

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

であるから、ここで a を 1 にした上で $f(x)=x^2$ の計算をすればよい。

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h} && (x^2\text{に } 1+h \text{ を代入})\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-1}{h} && (\text{展開})\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(2+h)}{h} && (\text{整理して因数分解})\\
&= \lim_{h\to 0}(2+h)=2 && (\text{約分して } h\to 0)
\end{aligned}$$

計算は単に、lim に関する部分を気にせず文字式の計算をしたに過ぎない。$h\to 0$ が活かされるのは計算が一段落した最後の行だけである。h はほとんど 0 と考えてよいほど微小な値であるから $2+h$ もほとんど 2 と考えてよい値となる。

* * *

ここで

$$\lim_{h\to 0}(2+h)\approx 2 \quad \text{でなく} \quad \lim_{h\to 0}(2+h)=2$$

と記述したことを不審に思うかもしれない。h は 0 と考えてよいが $h\neq 0$ であるから計算結果は "およそ 2"、すなわち $2+h\approx 2$ と書くべきであろうと。

その感覚は正しい。それがもし $2+h$ の計算であれば、$2+h\approx 2$ と書くべきである。しかし、ここでは $\lim_{h\to 0}(2+h)$ の計算であることに注意しなくてはいけない。$h\to 0$ は $h\approx 0$ と違って

$$0.001,\quad 0.0001,\quad 0.00001,\quad \ldots,\quad 0.00\cdots 001,\quad \ldots\to(0)$$

のような極限を考えている。すなわち $h\to 0$ のときの h は、0.001 でもなく 0.00001 でもなく $0.00\cdots 001$ でもなく、その先の... に含まれる数のどれかを特定しているのではない。矛盾したような言い方になるが、0 と隔たりがなく、かつ 0 でない数を指しているのである。

このとき $2+h$ は

$$2.001,\quad 2.0001,\quad 2.00001,\quad \ldots,\quad 2.00\cdots 001,\quad \ldots\to(2)$$

のように限りなく 2 に近づいている。つまり、近づく先の 2 は特定されている。このことから

$$\lim_{h\to 0}(2+h)=2$$

のように "=" を使うことは自然な記述であることが分かる。

一方 $h\approx 0$ とは、0.001 か 0.00001 か $0.00\cdots 001$ か、またはその先の... に含まれる数のどれかを指していて、その数は 0 とわずかながらの隔たりがある。この場合の h は隔たりによってそれ以上 0 に近づくことを阻まれている。したがって $h\approx 0$ なら $2+h\approx 2$ のように "≈" が使われるのが当然なのである。▮