

## 平均値の定理から

いま一度平均値の定理に戻ってみよう。それは、値が定まっているわけではない  $c$  を用いて

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (a < c < b)$$

と表されたのであった。もしここで接線の傾きにあたる  $f'(c)$  を  $f'(a)$  に変えてしまったら、もちろん等号は成り立たない。しかし、それを補正するために  $f'(a)$  に区間の幅  $(b - a)$  を用いて  $f'(a) + k(b - a)$  で調整することができたらどうだろう。

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \stackrel{?}{=} f'(a) + k(b - a) \quad (\ast)$$

そのような  $k$  は存在するだろうか。そこで  $(\ast)$  の式を、分母を払って

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(a) + k(b - a)^2$$

と書き直して、これが成り立つような  $k$  を定めてみよう。

唐突ではあるが、書き直した式の  $a$  を  $x$  にし、関数

$$F(x) = f(b) - f(x) - (b - x)f'(x) - k(b - x)^2$$

を考えると、 $F'(x) = -(b - x)f''(x) + 2k(b - x)$  となる。

\* \* \*

あまりに唐突すぎて戸惑っただろうが、この関数の置き方は平均値の定理の証明と同じく、ロルの定理を適用させるため  $F(a) = F(b) = 0$  となるように定めたものである。しかし、私を含め大概の人はこのような置き換えはすぐに思いつかないだろう。それは過去の数学者たちも変わらないのではないかな？ それでもこのような解決方法が見つかっているのは、大勢の人たちの努力の賜物に違いない。

また、 $F'(x)$  は結果だけを書いたのだが、 $-(b - x)f''(x)$  の項が積の微分、すなわち  $(fg)' = f'g + fg'$  によって微分され、直前の項  $-f(x)$  と打ち消しあったことに注意されたい。■

さて、 $F(a) = F(b) = 0$  であるから、ロルの定理より  $F'(c) = -(b - c)f''(c) + 2k(b - c) = 0$  となる  $c$  ( $a < c < b$ ) が存在する。この式から  $k$  について解けば  $k = \frac{1}{2}f''(c)$  がわかる。かくして平均値の定理から

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(a) + \frac{1}{2}(b - a)^2f''(c) \quad (a < c < b) \quad (\ast)$$

が得られた。この式は、 $b - a = h$  とおいて  $0 < \theta < 1$  を用いて

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{1}{2}h^2f''(a + \theta h)$$

の形に書けることになった。この関係式は、以前登場した近似式よりさらにより精度の近似式として利用できることを付け加えておこう。

## テイラーの定理

さて、ここから先は単なる物語と思って読んでもらいたい。というのも、証明などを含めながら進めると高校程度の域を相当離れてしまう。私の力量不足もあるが、雰囲気を感じ取ってもらえればよいのである。

いま、平均値の定理を拡張するような形で話を進め（※）に辿り着いたところである。実は、同じような手法を繰り返すことで（※）はさらに拡張されていく。そして、 $n$  回の繰り返しで

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \quad (a < c < b)$$

を満たす  $c$  が少なくとも 1 個あることが示される<sup>1</sup>。ここで  $b$  を変数  $x$  に替えるとテイラーの定理が姿を表す<sup>2</sup>。

テイラーの定理：

ある区間において  $f(x)$  が  $n$  回微分可能で、この区間で  $a$  を定数、 $x$  を任意の数とすると

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \quad (\star)$$

を満たす  $c$  ( $a < c < x$ ) が少なくとも 1 個ある。

## テイラー級数

テイラーの定理において、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n = 0$  ならば、 $f(x)$  は無限級数に展開される。無限級数とは、無限項にわたって数列の和をとることである（この場合の一般項は  $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$  になっている。初項は  $\frac{f^{(0)}(a)}{0!}(x-a)^0 = f(a)$ ）。したがって、テイラー級数とは（☆）の  $+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$  の項を  $+\cdots$  に替えたものである。

テイラー級数：

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

テイラーの定理/級数において、とくに“ $a$  を含む区間”を“ $0$  を含む区間”として展開した関係式をマクローリンの定理/マクローリン級数という<sup>3</sup>。これだけではマクローリンの定理/級数は、ただテイラーの定理/級数の特別な場合としか捉えられないだろう。しかし、 $0$  の周りの区間で無限

<sup>1</sup> $f^{(n)}$  は  $f$  の  $n$  階微分を表す。

<sup>2</sup>ブルック・テイラー (1685-1731)：イギリスの数学者。

<sup>3</sup>コリン・マクローリン (1698-1746)：スコットランドの数学者。

級数展開できるかどうかは重要なことで、 $x_0$  が展開可能な区間  $[-r, r]$  に含まれるなら、その  $x_0$  は代入可能ということになる。マクローリン級数に展開可能な区間  $[-r, r]$  を収束半径と呼ぶ。収束半径  $r$  の調べ方は省略させてもらおう。あらためてマクローリン級数の式を示す。

マクローリン級数：

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \quad (\star)$$

## $e^x$ のマクローリン級数

テイラー級数と言ってもよいのだが、 $f(x) = e^x$  について 0 の周りのマクローリン級数を見ることにしよう。

まず、 $(e^x)' = e^x$  なので、 $f'(0) = f''(0) = \cdots = e^0 = 1$  である。したがって (★) へ代入して

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

が得られる。この関数の収束半径は  $(-\infty, \infty)$ 、すなわちすべての実数値が  $x$  に代入可能ということである。

## $\cos x$ 、 $\sin x$ のマクローリン級数

$\cos x$  と  $\sin x$  は微分すると互いの関数を行き来する。具体的には

$n$	0	$\xrightarrow{\text{微分}}$	1	$\xrightarrow{\text{微分}}$	2	$\xrightarrow{\text{微分}}$	3	$\xrightarrow{\text{微分}}$	4
$f^{(n)}(x)$	$\cos x$		$-\sin x$		$-\cos x$		$\sin x$		( $\cos x$ に戻る)
$f^{(n)}(0)$	1		0		-1		0		(1)
$f^{(n)}(x)$	$\sin x$		$\cos x$		$-\sin x$		$-\cos x$		( $\sin x$ に戻る)
$f^{(n)}(0)$	0		1		0		-1		(0)

となるので、 $f^{(n)}(0)$  の値を (★) へ代入して

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \end{aligned}$$

が得られる。これらの関数の収束半径も  $(-\infty, \infty)$  である。

## オイラーの関係式

$e^x$  のマクローリン級数と  $\cos x$ 、 $\sin x$  のマクローリン級数を見比べたとき、 $\cos x$  と  $\sin x$  を合わせると  $e^x$  っぽくなるように見える。惜しいかな、符号がすべて + であればよかったのに...

そこで、本来は実数値関数である  $e^x$  のマクローリン級数において、形式的ではあるが  $x = i\theta$  を代入してみよう。すると

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \dots \\ &= 1 + \frac{i}{1!}\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{i}{3!}\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \frac{i}{5!}\theta^5 - \frac{1}{6!}\theta^6 - \frac{i}{7!}\theta^7 + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \dots\right) + i \left(\frac{1}{1!}\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \dots\right) \\ &= \cos \theta + i \sin \theta \end{aligned}$$

の関係が浮かび上がる。びっくりである。指数関数は虚数単位  $i$  を介して三角関数と結びついていたのであった<sup>4</sup>。

---

<sup>4</sup>オイラーの関係式として知られるこの式の周辺の話は、『複素数』の章でも述べているので参照されたい。