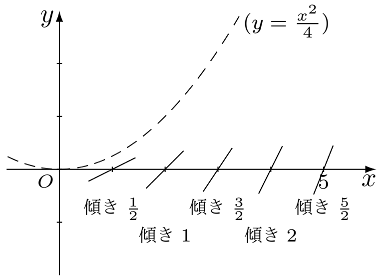
微分方程式

微分と積分は互いに逆演算と言われる。であれば与えられた関数の素性がどうあれ、その関数 $f(x)$ は、何かの関数を微分または積分した結果得られたのかもしれない。

$$\{G(x)\}' \quad \xrightarrow{\text{微分}} \quad f(x) \quad \xleftarrow{\text{積分}} \quad \int g(x)\,dx$$

しかしこのような見方にとどまってしまえば、単に関数の計算練習でしかない。実際は、関数を微分すると関数の接線の傾きが求められ、関数を積分すると関数が x 軸と囲む面積が求められる等、それぞれに意味を持つからである。

たとえば、ある x の値に対して関数の直接の値ではなく、接線の傾きが得られたとしよう。具体的に、その関数の x の値に対して接線の傾きが $\dfrac{x}{2}$ であったとする。つまり



ということだ。しかし、これではもとの関数がグラフ上に描けているわけではない。正しいもとの関数のひとつは $y = \dfrac{x^2}{4}$ である。ただし、接線を意味する線分を上下させて、点線の放物線に接する位置に描いておけば正しい関係になる。

ここまでの作業は、実は次の問い

問） 微分方程式 $y' = \dfrac{x}{2}$ を解け。ただし $x = 0$ のとき $y = 0$ とする。

を解いたことになっている。

このように、未知関数の導関数を含む等式を**微分方程式**という。いまの例は、**一般解**として解くなら $y = \dfrac{x^2}{4} + C$ が正しい。積分は定数項の分だけ不確かなものだからである。そのため、**特殊解**を一意に決めるには、C が定まるような**初期値**が与えられてなけらばならないのである。

微分方程式の解法

では教科書的かもしれないが、微分方程式の例をいくつか示してみよう。

問） 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = -y$ を解け。

解） 式を変形して $\dfrac{dy}{y} = -dx$ 。
両辺を積分して $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int (-1)\, dx$ より、$\log|y| = -x + C_0$ 。
よって、$|y| = e^{-x+C_0}$、すなわち $y = Ce^{-x}$ (C は任意定数：$\pm e^{C_0} = C$) 。

*　*　*

解答に説明は不要かもしれないが、いくつか注意をしておきたい。まず、方程式では初期値が与えられていなかったので、解は積分定数を含んでいる（最初の定数を C_0 としたのは記述上の問題にすぎない)。

問）において $y \neq 0$ を確認せずに割っているが、細かいことを言えば求めた解は $y \neq 0$ の場合である。しかし、かりに $y = 0$ なら **問）**は $\dfrac{dy}{dx} = 0$ だから微分方程式の解のひとつになる。これは $y = Ce^{-x}$（C は任意定数）と書けば、$C = 0$ のときにあたる。

また、dx を右辺へ移したり、両辺を積分すると言い単に積分記号 $\displaystyle\int$ をつけたりしているが、これは問題ないのである。というのも、微分方程式はもともと微小変化に関する方程式であり、$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -y$ の関係、すなわち微小変化 Δy と Δx の比が $-y$ に等しいことを表しているからである。比の関係で分母を払うことはかまわない。すると、そこに積分記号を付け足すことは、微小範囲の正しい比の関係を集めているだけなので、総和も正しい関係を保つだろう。▮

この例のようにもとの微分方程式を変形して、（y の式）$dy =$（x の式）dx にできるのなら、両辺の積分をとることで解が求められる。このタイプは**変数分離型**と呼ばれ、容易に解くことができるものである。

微分方程式には他にもさまざまなタイプがあり、タイプ別に解法も確立されている。しかし、ここでそれらを事細かに述べるのは煩わしいし、高校程度の学習を超えてしまう。解法を覚えて問題に取り組むのは、単に演習問題で訓練することと同じなので、興味がある人は各自で微分方程式について学んでほしい。

関係を微分方程式で表す

微分方程式の各種解法については述べないが、それでは微分方程式が役立つ場面を見られないだろう。簡単な例を示すことで、微分方程式が現れる例をひとつだけ示しておこう。

人口問題を考える。人口が増える割合は人口が多いほど速い。つまり、時刻 t における人口が y であったとすると、人口増加率は $\dfrac{dy}{dt}$ と考えられる。これが一定なら $\dfrac{dy}{dt} =$（定数）となるのだが、いまは人口が多いほど速いと仮定し（人口に比例すると考え）ているので、$\dfrac{dy}{dt} = ay$ と書ける。しかし人口は際限なく増えるものでもない。人口が増えれば食糧の問題など不都合なことが増え、そ

れらが人口を減らす要因となろう。そこで、その影響は人口の 2 乗に比例すると仮定すると、人口増加率は $\dfrac{dy}{dt}=-by^2$ と考えられる。

問） 上に述べた条件で、人口増加の微分方程式をたて、解を求めよ。

解） 条件をまとめて $\dfrac{dy}{dt}=ay-by^2$ である 。この微分方程式は以下のように解ける。
式を変形して $\dfrac{dy}{y(a-by)}=dt$ 。（人口 0 を考える意味はないので $y\neq 0$ とする。また $y=\dfrac{a}{b}$ のときは $\dfrac{dy}{dt}=0$ で、人口が一定を意味するので $y\neq\dfrac{a}{b}$ としておく。）
部分分数に分けた上で、両辺を積分して $\displaystyle\int\frac{1}{a}\left(\frac{1}{y}+\frac{b}{a-by}\right)dy=\int dt$ 。
これより、$\dfrac{1}{a}(\log|y|-\log|a-by|)=t+C_0$ 。
$\log\left|\dfrac{y}{a-by}\right|=at+C_1\ (aC_0=C_1)$ から $\dfrac{y}{a-by}=e^{at+C_1}=A_0e^{at}\ (e^{C_1}=A_0)$ 。
逆数をとって $\dfrac{a}{y}-b=A_0e^{-at}$ 。
y について解くと $y=\dfrac{1}{Ae^{-at}+b/a}\ (A_0/a=A)$ が求める解である。

関数方程式

関数 f が $f(x+y)=f(x)+f(y)$（※）を満たすとする。関数の関係を等式で表したので、これを**関数方程式**と呼ぶことにしよう。このままでは解が確定しないので、初期値として $f'(0)=a$ を与えておく。関数 f はどのような関数であろうか。

$f'(0)$ が与えられているので、2 変数の微分について知らなければならないかというと、そうでもない。この場合は x を一定にして、つまり定数と思って両辺を微分すると $f'(x+y)=f'(y)$ が得られる。この式で $y=0$ とおくと $f'(x)=f'(0)$ となり、初期値 $f'(0)=a$ より $f'(x)=a$ がわかる。$f'(x)=a$ ということは、積分して $f(x)=ax+C$（☆）が求められた。

ところで（※）の関係から $x=y=0$ とすると、$f(0)=f(0)+f(0)=2f(0)$ なので $f(0)=0$ である。したがって（☆）に代入して $C=0$ 。ゆえに最終的に求める関数は $f(x)=ax$ である。結論として

$$\boxed{f(x+y)=f(x)+f(y)、f'(0)=a \quad\Leftrightarrow\quad f(x)=ax}$$

が言えたことになる。

＊　＊　＊

$f(x+y)$ のような 2 変数の関数を求めるとき、x を一定にしてしまっては一般の議論から外れることを心配するかもしれない。しかし、$y=ax^3+bx^2+cx+d$ のような 3 次関数の係数を特定するとき、たとえば

$x = -1, 0, 1, 2$ を代入することはよくある。x は任意の実数で成り立つのだから、特定の値でも成り立つのは当然である。

すると、任意の x, y で成り立つ $f(x+y) = f(x) + f(y)$ の関係に、特定の値を代入することは何ら問題ないことになる。

では、3 次関数の係数を特定するときのように、たとえば $x = 1$ を代入すればよいように思えるが、それでは $f(1+x) = f(1) + f(y)$ の関係から先へ進むことはできない。この場合、何とかなるのは $x = 0$ としたときだけなのである。そのため、初期条件に与えられたのが微分係数にあたる $f'(0)$ だったのである。▮

続けて似たような関係を考える。関数 f が $f(x+y) = f(x)f(y)$ を満たす場合はどうだろう。初期値は $f'(0) = a$ を与える。

先の例と同じく、x を一定にして両辺を y で微分すると $f'(x+y) = f(x)f'(y)$ が得られる。この式で $y = 0$ とおくと $f'(x) = f(x)f'(0)$ となり、初期値 $f'(0) = a$ より $f'(x) = af(x)$ がわかる（★）。これを $\dfrac{dy}{dx} = ay$ の微分方程式とみて解くと、$y = Ce^{ax}$ が求められる。

ところで始めの f の関係式において $x = y = 0$ とすると、$f(0) = f(0)f(0) = \{f(0)\}^2$ なので $f(0) = 0, 1$ である。しかし $f(0) = 0$ とすると（★）に $x = 0$ を代入した際 $f'(0) = 0$ となって初期値の条件に反する。一方、$f(0) = 1$ は初期値の条件に合う。すると $f(0) = 1$ から $y = Ce^{ax}$ の定数は $C = 1$。結論として

$$\boxed{f(x+y) = f(x)f(y)\text{、}f'(0) = a \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = e^{ax}}$$

が言えたことになる。

＊　＊　＊

$f(x+y) = f(x)f(y)$ の関係をことばで表すとどうなるだろう。それは、f の “変数の和” が “関数の積” として表されていると読むことができる。そう考えると、その関係はたしかに指数法則 $a^{x+y} = a^x a^y$ に通じている。このことからも $f(x+y) = f(x)f(y)$ から $f(x) = e^{ax}$ が導かれるのは当然のことである。

一方で対数関数は指数関数と逆の関係、すなわち f の “変数の積” を “関数の和” にしている。対数の法則 $\log xy = \log x + \log y$ がまさにそれである。ということなら、

$$\boxed{f(xy) = f(x) + f(y)\text{、}f'(1) = a \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = a\log|x|}$$

が予想されるだろう。実際それは正しい。ここでは、繰り返しになるので解答は省略しよう。たしかにそうなることは各自で確かめてもらいたい。▮

さて、関数方程式の最後は $f(xy) = f(x)f(y)$ である。初期値は $f'(1) = a$ とする。

x を一定にして両辺を y で微分すると $xf'(xy) = f(x)f'(y)$ が得られる。左辺は合成関数の微分にあたるので、単に $f'(xy)$ でなく $f'(xy) \cdot x$ であることに注意されたい。この式で $y = 1$ とおくと $xf'(x) = f(x)f'(1)$ となり、初期値 $f'(1) = a$ より $xf'(x) = af(x)$ がわかる（＊）。これを $x\dfrac{dy}{dx} = ay$ の微分方程式とみて解くと、$y = Cx^a$ が求められる。

始めの f の関係式において $x=y=1$ とすると、$f(1)=f(1)f(1)=\{f(1)\}^2$ なので $f(1)=0,1$ である。しかし $f(1)=0$ とすると（＊）に $x=1$ を代入した際 $f'(1)=0$ となって初期値の条件に反する。一方、$f(1)=1$ は初期値の条件に合う。すると $f(1)=1$ から $y=Cx^a$ の定数は $C=1$。結論として

$$\boxed{f(xy)=f(x)f(y)\text{、}f'(1)=a \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=x^a}$$

が言えたことになる。