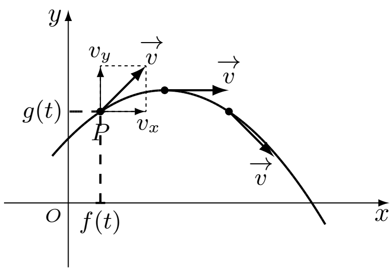
速度と加速度

速度と加速度は微分の関係にある。直線上を運動する点 P の位置 x が時刻 t の関数 $f(t)$ になっているとき、P の速度 v は $v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$ であり、加速度 a は $a=\dfrac{dv}{dt}=\underline{\dfrac{d\frac{dx}{dt}}{dt}=\dfrac{d^2x}{dt^2}}=f''(t)$ である。加速度 a の途中式（下線部の第 1 式）は単に $v=\dfrac{dx}{dt}$ の代入であり、$\dfrac{d^2x}{dt^2}$ は $\dfrac{(dx)^2}{(dt)^2}$ を表している。下線部を文字式の計算と見れば妥当な記述に思えるだろう。

物理で、自由落下運動の速度に関する方程式を $v=gt$ と覚えただろうか[1]。物体を落としたときの t 秒後の速度がわかる公式である。速度の微分が加速度なので、t で微分した $v'=g$ が重力加速度となる。公式は微分/積分の考えで作られていたのである。

物理ではこの後、角度 θ で投げ上げた物体の位置や速度に関する公式が登場し、それは放物線上の運動として扱われる。ここでは放物線に限らず、平面上の 1 つの曲線に沿って運動する点 $P(x,\ y)$ が時刻 t の関数で表されているとして、$P(x(t),\ y(t))$、すなわち $x=f(t)$、$y=g(t)$ で与えられるものとする。



速度はベクトルであることに注意されたい。その上で曲線に沿って運動するのだから、速度の方向は曲線の接線上にある。したがって速度 $\overrightarrow{v}$ は、x 方向の成分 v_x と y 方向の成分 v_y に分解され、$\overrightarrow{v}=(v_x,\ v_y)$ となっている。そのため、

$$\boxed{x\text{ 方向の速度は } v_x=\frac{d}{dt}x=f'(t)\text{、}y\text{ 方向の速度は } v_y=\frac{d}{dt}y=g'(t)}$$

である。さらに、加速度は速度と同様に $\overrightarrow{a}=(a_x,\ a_y)$ と分解され、

$$\boxed{x\text{ 方向の加速度は } a_x=\frac{d}{dt}v_x=\frac{d^2}{dt^2}x=f''(t)\text{、}y\text{ 方向の加速度は } a_y=\frac{d}{dt}v_y=\frac{d^2}{dt^2}y=g''(t)}$$

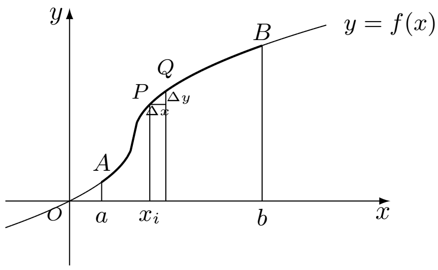
となっている。また、速度を方向を無視して単に "速さ" と言えば、それはベクトルの大きさであるから $|\overrightarrow{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$ で求められる。このことは、上の図を見て三平方の定理を思い出せば自明のことだろう。同じく加速度の大きさも $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$ である。

[1] g は重力 (*gravity*) 加速度で約 $9.8\mathrm{m/s^2}$、t は時間 (*time*) で単位は "秒" である。ついでに速度は "*velocity*"、加速度は "*accelerate*"。

曲線の長さ

点の位置の微分が速度、速度の微分が加速度であるとは、見方を逆にして速度の積分が点の位置、加速度の積分が速度であることを意味する。もっとも、点の位置というと意味が通らないだろうから、点の道のり、つまり曲線の長さと言うべきかもしれない。

このことから積分は、単に曲線が x 軸と囲む面積を求めるにとどまらず、曲線上を運動する点の道のり、すなわち曲線の長さを求めることもできるのである。



そのことを具体的な図で示しておこう。曲線 AB の長さは、区間 $[a,\, b]$ を微小区間に分け、各微小区間 PQ の総和で近似できる。それを $\Delta x \to 0$ としたものが曲線 AB の長さである。$\Delta x \to 0$ において、曲線 $PQ \approx$ 線分 PQ であるから、

$$PQ \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x \quad （※）$$

という計算が成り立つ。この総和において $\Delta x \to 0$ とするので、曲線 PQ の長さは

$$\boxed{PQ = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}$$

で求められることがわかる。すなわち $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx$ の積分計算をすればよいのである。例を挙げておこう。

問） 曲線 $y = \sqrt{1 - x^2}$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の長さ L を求めよ（半径 1 の円の右上 1/4）。

解） $$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2}\, dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = [\sin^{-1} x]_0^1 = \sin^{-1} 1 - \sin^{-1} 0 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$
。たしかに半径 1 の 1/4 円である。

$*\quad*\quad*$

上の解で曲線の長さが計算できたのだが、突然 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1}x$ と言われても納得がいかないかもしれない。ここでは、逆に $(\sin^{-1}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ であることを示そう。$\sin^{-1}x$ の逆関数は $x = \sin y$ だから、$\dfrac{dx}{dy} = \cos y$ である。このとき $\cos y = \sqrt{1-(\sin y)^2} = \sqrt{1-x^2}$ であるから、$\dfrac{dx}{dy} = \sqrt{1-x^2}$。ゆえに、逆関数の微分の公式より $(\sin^{-1}x)' = \dfrac{1}{dx/dy} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ となるのである。▮

媒介変数による曲線の長さ

関数が媒介変数表示されていても、曲線の長さを求めることができる。いま、$x = f(t)$、$y = g(t)$ とすると、（※）の式は

$$PQ \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\cdot\Delta t$$

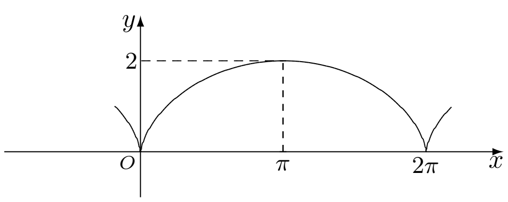
と変形するのがよい。この総和において $\Delta t \to 0$ とするので、曲線 PQ の長さは

$$\boxed{PQ = \lim_{\Delta t\to 0}\sum_{i=0}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\cdot\Delta t = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt}$$

で求められることがわかる。$a \leqq x \leqq b$ には $\alpha \leqq t \leqq \beta$ が対応するものとしている。ここでも例を挙げておく。

問） サイクロイド $x = \theta - \sin\theta$、$y = 1 - \cos\theta$ の 1 サイクルの曲線の長さを求めよ。

解） グラフを再掲しよう。$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ における長さを求めればよい。



したがって求める曲線の長さ L は

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2}\,d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos\theta)}\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}\, d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta \\
&= 2\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 8
\end{aligned}$$

である。円周上の点が回転したわりには、点の軌跡が整数値になるのは少し意外に思えるかもしれない。

近似式と近似値

前節から微小変化を中心に、微分/積分について考えてきた。ここで少し前に戻るが、平均値の定理を思い出してほしい。実はここにも微小変化が関係していた。平均値の定理を書き換えた式をもう一度提示しよう。

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h) \quad (0 < \theta < 1)$$

この関係式は、はっきりしない変数 θ を含むものの、完全に等しい等式を表している。いま、h は十分小さいものとすれば、値の定まらない θh を除いて

$$\boxed{f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)}$$

と近似することはかまわないだろう。とくに $a = 0$ とし、関数の変数の意味を明確にするため $h \to x$ で置き換えると関係式は

$$\boxed{f(x) \approx f(0) + xf'(0)}$$

となる。ここでは h を十分小さい値と見ていたので、x が十分小さい値なら、これを近似式として扱えることになる。

たとえば x が十分小さい関数 $f(x) = (1+x)^2$ を考えてみよう。$f'(x) = 2 + 2x$ なので

$$f(x) \approx f(0) + xf'(0) = 1 + 2x$$

とできる。一般に $(1+x)^n \approx 1 + nx$ となる。たとえば $1.02^3 = 1.061208$ であるが、近似式を用いて

$$1.02^3 = (1+0.02)^3 = 1 + 3 \times 0.02 = 1.06$$

とするのは手軽でよい。誤差は 1/1000 ほどであるから、実用に十分な場面は多いだろう。