合成関数の微分

関数にはいろいろな表現方法があるものだ。いくつか拾って、微分について考えてみたい。

まず、合成関数から。合成関数は、たとえば $y=f(u)$、$u=g(x)$ のとき、$y=f(g(x))$ として y を x の関数で表すものである。この場合、y を x で微分することは $\dfrac{dy}{dx}$ で表されるが、これを f' と g' で表すならどのように書けばよいか、ということである。

そこでまず、微分の考えに至る前、つまり微小変化について考えよう。$y=f(u)$ は u の微小変化 Δu に対し、y の微小変化 Δy が対応する。微小変化率は $\dfrac{\Delta y}{\Delta u}$ である。同様に $u=f(x)$ の微小変化率は $\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ である。このとき、y の x に対する微小変化率は $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ であるから、微小変化率の関係は $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$ になっている。この極限をとることが微分であるから

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x,\Delta u,\Delta y\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)g'(x)}$$

となることがわかる。ひとつ例を挙げておこう。

問） $y=\sin^2\dfrac{1}{x}$ を x で微分せよ。

解） $y:f(u)=\sin^2 u$、$u:g(x)=\dfrac{1}{x}$ の合成であるから、

$$y'=f'(u)g'(x)=(\sin^2 u)'\left(\frac{1}{x}\right)'=2\cos u\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{2}{x^2}\cos\frac{1}{x}\ 。$$

逆関数の微分

次は、逆関数について。もとの関数 y が x の関数であったとき、逆関数は $x=f(y)$ と書かれるだろう。この逆関数について $\dfrac{dy}{dx}$ を求めたい。

$x=f(y)$ の微小変化を考えると、x の y に対する微小変化率は $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$ であり、y の x に対する微小変化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ とはちょうど逆数の関係にある。したがって、逆関数の微分は

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y,\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{f'(y)}}$$

となることがわかる。ただし、$f'(y)\neq 0$ である。これも例を挙げよう。

問） $y=\tan^{-1}x$ を x で微分せよ[1]。

---

[1] $\tan^{-1}x$ は $\arctan x$ とも書く。

解） 逆関数は $x = \tan y$ だから、$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$（$\tan y = x$ を代入した）。
よって、$y' = \dfrac{1}{f'(y)} = \dfrac{1}{1+x^2}$ 。

媒介変数による微分

最後は媒介変数表示の場合である。$x = f(t)$、$y = g(t)$ とする。このとき、x, y のそれぞれの t に対する微小変化率は $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ であるから、y の x に対する微小変化率の関係は $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}$ となっている。したがって、媒介変数表示の関数の微分は

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t, \Delta x, \Delta y \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}}$$

となることがわかる。ここでも、$f'(t) \neq 0$ の条件は必須である。例を示す。

問） $x = \cos t$、$y = \sin t$ を x で微分せよ。

解） $y' = \dfrac{g'(t)}{f'(t)} = \dfrac{\cos t}{-\sin t}$ 。ここで $-\sin t = -\sqrt{1-\cos^2 t} = -\sqrt{1-x^2}$ だから、
$y' = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 。

置換積分

積分には微分にはない困りごとがある。積分困難な関数が多すぎることである。ただ積分と面積の関連から、グラフで表せるような関数なら x 軸と囲む面積を求めることが困難なものがあるとは想像し難い。しかし実際は、$y = e^{x^2}$ のような単純そうな関数でさえ、既存の関数を用いて表すことができないことが知られている。

それでもいろいろな工夫で積分可能な関数は多い。ここでは基本的な手法を扱っておこう。

まず、合成関数の微分を思い出そう。$y = f(x)$、$x = g(t)$ のとき、$y' = f'(g(t))g'(t)$ であった（習慣にしたがい変数 u, x は変数 x, t に読み替えている）。この関係は $\displaystyle\int f'(x)\,dx = \int f'(g(t))g'(t)\,dt$ と書けるが、$f'(x)$ をあらためて関数 $f(x)$ と考えれば、関数 $f(x)$ の積分が

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt}$$

で行えることになる。この方法は**置換積分**と呼ばれる。

*　　*　　*

$y' = f'(g(t))g'(t)$ の関係を積分する際、しれっと $\displaystyle\int f'(x)\,dx = \int f'(g(t))g'(t)\,dt$ であるとした。左辺は x で積分し、右辺は t で積分することは問題ないのだろうか。これでよいことは少しばかり議論を要するが、そこには立ち入らず、単純に『x を積分するから dx、t を積分するから dt と書くのは当たり前』じゃないかという感覚で進めることにする。▌

具体的な問題を挙げた方が理解しやすいだろう。

問） $\displaystyle\int \frac{2x}{(x-1)^3}\,dx$ を求めよ。

解） $x-1=t$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=1$ 。また、$2x = 2(t+1)$ 。これより

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{(x-1)^3}\,dx &= \int \frac{2(t+1)}{t^3}\frac{dx}{dt}\,dt \;=\; 2\int\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right)dt \;=\; 2\left(-\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}\right)+C \\ &= 2\left(\frac{-2t-1}{2t^2}\right)+C \;=\; \frac{-2(x-1)-1}{(x-1)^2}+C \;=\; \frac{-2x+1}{(x-1)^2}+C\ 。\end{aligned}$$

部分積分

積の微分公式 $(fg)' = f'g + fg'$ は覚えているだろうか。これは両辺を積分すると $\displaystyle fg = \int f'g\,dx + \int fg'\,dx$ になる。そして、この関係式は積分に利用できるのである。まず公式の形として示す（関係式の右辺第 2 項を移項し、両辺を交換している）。

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx}$$

この公式の使い方は戸惑うだろう。やはり具体例を挙げることにしたい。

問 i） $\displaystyle\int xe^x\,dx$ を求めよ。

解 i） 式中の e^x を $(e^x)'$ と見て公式を適用する。

$$\begin{aligned}\int xe^x\,dx &= \int x(e^x)'\,dx \;=\; xe^x - \int (x)'e^x\,dx \;=\; xe^x - \int e^x\,dx \\ &= xe^x - e^x + C \;=\; (x-1)e^x + C\ 。\end{aligned}$$

問 ii） $\displaystyle\int \log x\,dx$ を求めよ。

解 ii） $(x)'=1$ を利用して、

$$\begin{aligned}\int \log x\,dx &= \int \log x\cdot(x)'\,dx \;=\; x\log x - \int (\log x)'\cdot x\,dx \\ &= x\log x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx + C \;=\; x\log x - x + C\ 。\end{aligned}$$

何もないところに $(x)' = 1$ をあてがうのはやや技巧的だろうが、$(x)'$ はよく利用される手法である。

媒介変数による積分

媒介変数による関数の微分を扱ったので、媒介変数による積分も扱おう。一般に積分は関数 $y = f(x)$ が x 軸と囲む面積として $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を計算するのであった（区間 $[a,\ b]$ で $f(x)$ が x 軸と囲む面積としている）。したがって、関数が媒介変数を用いて $x = f(t)$、$y = g(t)$ のように表されているとき、$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ をどのように計算するか、ということになる。

ここで、積分の考え方に立ち返ってみたい。積分による関数の面積計算は、関数と x 軸で囲まれた図を微小長方形で覆い、その総和を求めることであった。つまり

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{b-a}{n} \quad\to\quad \lim_{i\to\infty,\Delta x\to 0}\sum f(x_i)\Delta x \quad\to\quad \int_a^b f(x)\,dx$$

のような道筋を辿ったのである。

ここに媒介変数で表された関数があれば、その微小変化率は $x,\ t$ については $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$、$y,\ t$ については $\dfrac{\Delta y}{\Delta t}$ であろう。すると $\Delta x = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}\Delta t$ と見ることで道筋の途中式は $\displaystyle\lim_{i\to\infty,\Delta t\to 0}\sum y_i\frac{\Delta x}{\Delta t}\Delta t$ と見直せる。この極限操作は、あたらめて $\displaystyle\int_\alpha^\beta g(t)f'(t)\,dt$ と書いてよいだろう（x の積分範囲 $[a,\ b]$ は t の積分範囲と一般に異なるので $[\alpha,\ \beta]$ を用いた）。すなわち、媒介変数 t を用いた曲線の式が $x = f(t)$、$y = g(t)$ で与えられていて、$a = f(\alpha)$、$b = g(\beta)$ が区間 $\alpha \leqq t \leqq \beta$、$a \leqq x \leqq b$ と対応するとき、曲線が区間 $[a,\ b]$ で x 軸と囲む面積 S は

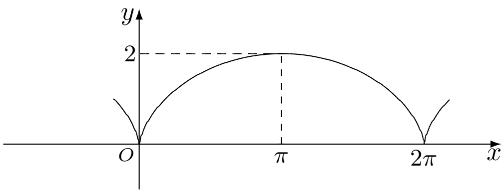
$$\boxed{S = \int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta y\frac{dx}{dt}\,dt = \int_\alpha^\beta g(t)f'(t)\,dt}$$

である。ただし簡単のため、$y \geqq 0$、$f'(t) \geqq 0$ としている。

このような面積を求める例としてサイクロイドを挙げておこう。

問） サイクロイド $x = \theta - \sin\theta$、$y = 1 - \cos\theta$ が 1 サイクルで x 軸と囲む面積を求めよ。

解） この場合の 1 サイクルは $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲である。このとき $0 \leqq x \leqq 2\pi$、$0 \leqq y \leqq 2$ だから、グラフは下図になる。ちなみにこの曲線は、半径 1 の円周上の 1 点が描く軌跡である。



したがって求める面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi} y\,dx = \int_0^{2\pi} y\frac{dx}{d\theta}\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)\cdot(1-\cos\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (1-2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\,d\theta \\
&= \left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = 3\pi
\end{aligned}
$$

である。回転する円の面積の、ちょうど 3 倍になっていることがわかる。