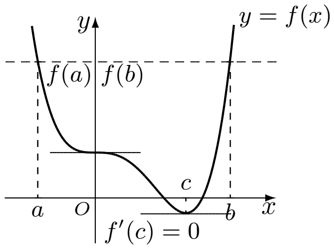
ロルの定理

一般に**なめらかな**関数は、微分することでその点における接線の傾きがわかる。なめらかな関数とは、微分可能な関数のことである。さて、関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で、開区間 $(a,\ b)$ で微分可能なとき、

$$f(a)=f(b) \text{ ならば、} f'(c)=0\ (a<c<b) \text{ を満たす } c \text{ が少なくとも 1 個ある}$$

ことが知られている（**ロルの定理**[1]）。この状況をグラフで表してみると、たとえば



のようなものが考えられる。この図では $x=0$ においても $f'(c)=0$ となっているから、条件を満たす c は 2 個である。

しかしこのようなことは、いくつかのグラフを適当に描いてみて、その様子をうかがえば当然のことに思える。そして定理の証明は、さらに当然と思える定理

区間 $[a,\ b]$ 上で定義された連続関数 $f(x)$ は、必ず最大値と最小値をとる

によって示される。ただ厳密に証明するとなると、そこには**実数の連続性**などの繊細な領域に立ち入る必要がある。ここでは手に負えないので、ロルの定理は既知の事実として扱うことにしよう。

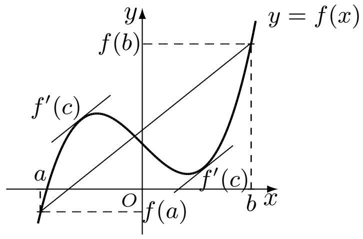
平均値の定理

ところでロルの定理は、あまりに限定的な条件が与えられている。とくに区間 $[a,\ b]$ で $f(a)=f(b)$ となる状況は特殊すぎるきらいがある。そこで、もう少し一般的な状況で与えられるのが、次の**平均値の定理**である。

> 関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続、区間 $(a,\ b)$ で微分可能なとき、
> $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (a<c<b)$$
> を満たす c が少なくとも 1 個ある。

[1] ミシェル・ロル（1652–1719）: フランスの数学者。著書において証明を発表したことからその名がついた。

この状況をグラフで表してみると、たとえば



のようなものが考えられる。この図では条件を満たす c は 2 個である。

平均値の定理は端点に制約がないため、ロルの定理より柔軟に利用できそうである。とはいえ、図からはロルの定理を少し歪（ゆが）めているだけのようだ。実際、$(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$ を通る直線の方程式は $y=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ であるから

$$F(x)=f(x)-\left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right\} \quad （※）$$

とおくと、$F(a)=F(b)=0$ になるので $F(x)$ にロルの定理を適用できる。すると（※）において $F(x)$ を（$\{\ \ \}$ 内の式は本質的に $mx+n$ であることに注意して）x で微分して $x=c$ とすると

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

を満たす c $(a<c<b)$ が存在することがわかるのである。

*　　*　　*

数学において置き換えはよく行われるが、どうして（※）の置き換えを思いつくのか疑問に思うだろうか。しかし、平均値の定理はロルの定理を少し歪めて見ているのだから、歪みをなくせばロルの定理に帰着できるであろう。そのためには $a\to b$ のときに $f(a)\to f(b)$ となった分を補正してやればよい。それは、$f(a)$ から直線の傾き分だけ増加または減少しているので、その間に変化した直線の値だけ増減させればよいのである。

もちろん一瞬にして閃（ひらめ）いたとは限らないけれど、定理の発見や証明は、いま手にしている確たる理屈と膨大な試行錯誤を延々組み合わせることで成し遂げられるものである。最短時間で効率よく学習する試験勉強の方法だけが数学の勉強法だと思っている向きには、新しい発見は降りてこないものだ。▮

平均値の定理の活用

平均値の定理をそのままで使うことは、単に区間 $[a,\ b]$ のどこかに、端点を結ぶ線分の傾きと同じ傾きを持つ接線を引ける点があると言っているに過ぎない。これでは当たり前すぎて、定理としての活用範囲は広がらないだろう。そこで平均値の定理の式を

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(c) \quad (a<c<b)$$

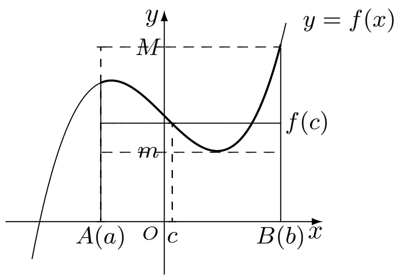
と見直した上で、c が a から区間のどの位置にあるか、すなわち $c=(b-a)\cdot\theta$ $(0<\theta<1)$ とおいてみる。すると式は $f(b)=f(a)+(b-a)f'(a+(b-a)\cdot\theta)$ となるが、少し見づらいので $b=a+h$ に置き換えて

$$\boxed{f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h) \quad (0<\theta<1)}$$

としてみよう。これは、関数 $f(x)$ が a から h だけ変化すると、その値は $f(a)$ に $hf'(a+\theta h)$ を加えたものであることを意味する。とは言っても、θ が特定されているわけではないので、なんとなく落ち着かない関係式であるに違いない。これについては次節の最後にまた触れることにして、ここでは平均値の定理についてもう少し述べることにしよう。

積分の平均値の定理

区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $y=f(x)$ を考える。ロルの定理を述べた際、$f(x)$ は区間内で最大値と最小値をとることを指摘しておいた。それらを $M,\,m$ としよう。すると区間 $[a,\ b]$ 内にある任意の $x=c$ は、$m\leqq f(c)\leqq M$ を満たすことになる。さて、この状況をグラフで表そう。



このとき $f(x)$ のグラフは、“底辺 AB、高さ m の長方形” と “底辺 AB、高さ M の長方形” の間に完全に挟まれている。そして、c の値は確定していないが $m\leqq f(c)\leqq M$ であることは間違いないので、“底辺 AB、高さ $f(c)$” の長方形は、やはり先の 2 つの長方形に完全に挟まれていることになる。つまり、面積を考えると

$$(b-a)m\leqq(b-a)f(c)\leqq(b-a)M$$

が成り立っていて、かつ、$(b-a)f(c)$ は $(b-a)m$ から $(b-a)M$ まで連続的に変化している。

ところで、関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で x 軸と囲む面積は $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ であるから、関数 $f(x)$ のグラフが先の 2 つの長方形に完全に挟まれていることと合わせて考えると

$$(b-a)m\leqq\int_a^b f(x)\,dx\leqq(b-a)M$$

が成り立っていて、かつ、$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は $(b-a)m$ から $(b-a)M$ まで連続的に変化している。

以上のことから、$(b-a)f(c) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \ (a < c < b)$ を満たす c の存在を認めることができる。これを**積分の平均値の定理**という。正確に述べれば

> 関数 $f(x)$ が区間 $[a,\ b]$ で連続なとき、
> $$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c) \qquad (a < c < b)$$
> を満たす c が少なくとも 1 個ある。

である。