関数の極限

ここに関数 $y = f(x)$ があるとしよう。関数は x の値をひとつ決めると y の値がひとつ決まる。このとき、勝手な x の値から y の値を求めることを繰り返しても、関数の値が単発的に決まるだけである。しかし、もう少し系統的に、たとえば $x = a + h$ から $x = a$ に近づくような x の値を代入するとどうだろうか。$h > 0$ として、順に x に代入する値を

$$a + h, \quad a + \frac{h}{2}, \quad a + \frac{h}{4}, \quad a + \frac{h}{8}, \quad a + \frac{h}{16}, \quad \ldots$$

のようにとると、これらは次第に $x = a$ に近づいていくが決して $x = a$ にならない点列になっている。この例は x が $x = a$ に**限りなく近づく**ひとつの例になっている。

限りなく近づく近づき方はいろいろある。x の値を

$$a + h, \quad a - \frac{h}{2}, \quad a + \frac{h}{4}, \quad a - \frac{h}{8}, \quad a + \frac{h}{16}, \quad \ldots$$

のようにとると、点列は a の前後を行ったり来たりするものの、やはり限りなく $x = a$ に近づく。また、

$$a + h, \quad a + \frac{h}{2}, \quad a - \frac{h}{3}, \quad a - \frac{h}{5}, \quad a - \frac{h}{7}, \quad a + \frac{h}{11}, \quad \ldots$$

のように必ずしも規則的でない近づき方もある。

いずれにせよ、x の点列が $x = a$ に限りなく近づくという概念は微妙な均衡の上に成り立つ考えで、近づきはするが一致しないことが重要である。このような値のとり方を $x \to a$ で表すことにしよう。すると、$x \to a$ にともなって関数 $f(x)$ の値も変化するのであるが、必ずしも一定の値に近づくとは限らない。実際、$y = \dfrac{1}{x}$ で $x \to 0$ とすると、$\dfrac{1}{x}$ の値はいくらでも大きな値になり、一定の値に近づかない。しかしながら、一定の値 b に近づくこともある。このようなときは関数 $f(x)$ は極限をもつといい、それを**極限値**と呼ぶ。このさまを記号で

$$\boxed{f(x) \to b \quad (x \to a)}$$

と書いたり

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = b}$$

と書く。

*　*　*

ここで、記号の使い方に違和感を持たれたかもしれない。それは、$x \to a$ のとき $f(x) \to b$ であるのに、$\lim$ を用いると等号が使われることである。しかしこの記述はおかしくない、というより自然な記述になって

いるのである。なぜかというと、私たちが気にするのは、x が限りなく a に近づくとき $f(x)$ がどんな値に近づくか、だからである。繰り返して書くと、$f(x)$ がどんな値に**なるか**を問題にしているからではなく、どんな値に**近づくか**を問題にしているからである。先ほど、限りなく近づく概念は微妙な均衡の上に成り立つと書いたのは、このことを指したのである。すると

x が限りなく a に近づくとき $f(x)$ の値もある値に限りなく近づく。その近づく**先の値は** b である。

という言葉を記号化したものが $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ であることが納得できるであろう。▮

関数の極限値

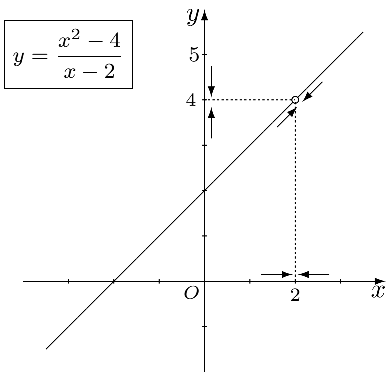
関数 $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ を考えてみよう。この関数は分母に $x - 2$ があるので、$x = 2$ のとき $g(x)$ は定義されない。したがって $g(2)$ を求めることはできない。しかし $x \neq 2$ であれば

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = x + 2$$

であるから、結局 $y = g(x)$ は

$$y = x + 2, \quad (x \neq 2)$$

とまったく同じことを表している。これはグラフ上では、点 (2, 4) が欠けた直線である。



この場合 $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 4$ となるが、値 4 は $g(x)$ に $x = 2$ を代入して得られたものではなく、$x \to 2$ であるとき $g(x)$ の値がどこに近づくかを表しているのである。このことは実際に、次第に 2 に近づく x の値を $g(x)$ に代入してみれば分かることである。

x	1.9	1.95	1.9997	1.999999	$\cdots$	(2)	$\cdots$	2.000002	2.006	2.03	2.1
$g(x)$	3.9	3.95	3.9997	3.999999	$\cdots$	(4)	$\cdots$	4.000002	4.006	4.06	4.1

極限値は関数のグラフが即座に分からない場合でも、計算の工夫で値を求められることがある。たとえば $y = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ において、$x \to 1$ の極限値を求めることにしよう。これは

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} &= \lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} && \text{（分子の有理化）}\\
&= \lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\\
&= \lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2} && \text{（約分して } x \to 1\text{）}
\end{aligned}$$

のように、分子を有理化することで解決する。

この様子は実際、Microsoft Excel でも確認できる。

◇	A	B	C	D	E
1	x	(√x-1)/(x-1)			
2	0.9	=(SQRT(A2)-1)/(A2-1)			
3	0.99	↓下へコピーする			
4	0.999	↓			
5	0.9999	↓			
6	0.99999	↓			
-	1	#DIV/0!			

0.9 から始めて桁数を増やしてもよいし、$1.0\cdots01$ から始めて桁数を減らしてもよい。いずれにしても次第に値が 0.5 に近づくことが分かる。そして 1 を与えると Excel はエラーを返す。$x=1$ では関数が定義されないからである。

関数の連続

ところで関数 $y = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ は、わざわざ極限の話を持ち出すことなく、グラフが $x=2$ で分断されていることはわかる。つまり関数は**連続**でない。もし $x=2$ のとき $y=4$ であればグラフはつながる。すなわち連続となる。この状況をグラフではなく、関数の極限という観点で見るとどう表現されるだろうか。

それは、$y=4$ が極限値としての値ではなく、実際に関数の値として存在することである。と言っても単に実際の値が存在するだけでなく、$\lim\limits_{x\to2} g(x) = 4$ でなくてはならない。一般には、関数 $f(x)$ において、$x=a$ の近辺で $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ および $f(a)$ が存在して両者が等しいときに関数は連続するだろう。そこで

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \text{ のとき、} f(x) \text{ は } x=a \text{ で連続である}}$$

ということにする。もし、このことが $f(x)$ がある区間 $(a,\ b)$ のすべての x で成り立つなら、$f(x)$ は区間 $(a,\ b)$ で連続である。さらに、x のすべての定義域で連続であるとき、$f(x)$ は**連続関数**となる。

＊　＊　＊

連続関数について

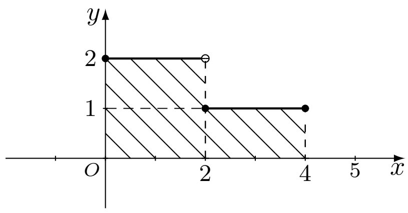
$$f(x)\text{ がある区間 }(a,\ b)\text{ のすべての }x\text{ で成り立つなら、}f(x)\text{ は区間 }(a,\ b)\text{ で連続である}$$

と書いたが、ここは "閉区間 $[a,\ b]$" と言い換えることができる。一般に点 $x = a$ における極限は、$\epsilon > 0$ として $x - \epsilon$ の側と $x + \epsilon$ の側の両方から近づくことができなくてはならない。その意味では、区間を $[a,\ b]$ としてしまうと、たとえば $x = a$ の $a - \epsilon$ の側から近づくことはできない（$a - \epsilon \notin [a,\ b]$）。

しかし、端点 $x = a$ の左側はもともと区間にないのだから、$x = a$ の右側さえ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ を満たせばよいことになる。このようなとき、この極限を**右極限**といい、とくに $\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$ と表す。$_{+0}$ が "a より大きい値をとりながら右側から近づく" ことを示している。同様に $\lim_{x \to b-0} f(x) = f(b)$ と書いて、端点 $x = b$ の**左極限**を表す。この場合は "左側から近づく" ことを示している（区間の左端、右端と混同しないように）。▮

積分で連続関数に

次の関数を考えてみよう。明らかな不連続関数である。



$$y = \begin{cases} 2 & (0 \leqq x < 2) \\ 1 & (2 \leqq x \leqq 4) \end{cases}$$

この関数において、$0 \leqq x \leqq 4$ の範囲で関数が囲む面積—と言っても隙間があって厳密には囲まれていないが、グラフの上部から光をあてたとき x 軸との間にできる影の部分の面積—を求めるなら、関数を積分するまでもなく 6 であることはすぐにわかる。しかし関数を積分するなら

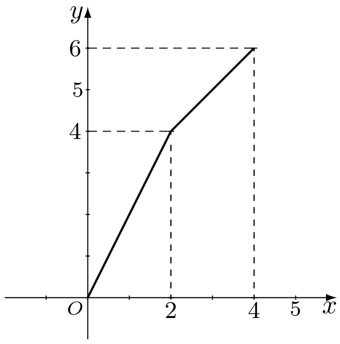
$$\int_0^4 y\,dx = \begin{cases} 2x & (0 \leqq x < 2) \\ x & (2 \leqq x \leqq 4) \end{cases}$$

となる。積分した関数の値は $x = 2$ においてそれぞれ 4 と 2 だから、明らかに値の断絶がある。

しかし実際は、区間 $[0,\ 2 + \Delta x]$ において関数が囲む面積は、区間 $[0,\ 2]$ と区間 $[2,\ 2 + \Delta x]$ の和であるから、すでに区間 $[0,\ 2]$ の面積 4 は加算されている。したがって、積分することで得られる面積は

$$\int_0^4 y\,dx = \begin{cases} 2x & (0 \leqq x < 2) \\ 4 + x & (2 \leqq x \leqq 4) \end{cases}$$

である。つまり、$x \geqq 2$ では面積の値は 4 から始まり、断絶は起きていないことになる。これをグラフで表すと



$$\boxed{\int_0^4 y\,dx = \begin{cases} 2x & (0 \leqq x < 2) \\ 4+x & (2 \leqq x \leqq 4) \end{cases}}$$

となるわけだから、積分した関数は連続である。ただし、$x=2$ で微分可能ではないことに注意されたい。

　このように、積分は不連続関数を連続関数にすることができるのである。