オイラーの関係式

複素数を係数とする 2 次方程式が、複素数の範囲で解けることは見てきたし、複素数も実数と同じような計算ができることも分かったと思われる。また、実数だけでは負の数の開平ができなかったのに、複素数まで拡張することで負の数の開平までできるようになったのは大変な収穫であろう。しかし、私たちは複素数であらゆる計算が事足りるという確認をしたわけではない。たとえば、実数では当たり前のように計算できるべき乗、すなわち 2^3 のような計算が、たとえば複素数において 2^{3i} などが計算できるかとなると心もとない。そもそも、虚数乗をどう定義したらよいのだろう。

さらに考えを進めると、実数値で扱ってきたいろいろな関数に複素数が使えるのかどうかも分からない。$\sin 2i$ や $\log 3i$ などは意味を持つのだろうか。疑問は次々に浮かぶかもしれないが、これまでに蓄えた複素数の知識だけでは、疑問を解決することはできない。しかし数学では、定理や公式を導くためには相応の知識が必要でも、与えられた定理や公式を使うには既存の知識で十分なことはよくある。オイラーの関係式と呼ばれる

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

もそのひとつである[1]。なぜ指数関数が三角関数の和になるのか、なぜ虚数単位 i を含むのか、そもそも e の虚数乗の計算ができるのか、等々疑問は多いであろう。しかし、それらの疑問をどこかにしまって、θ にありきたりの値を代入することは指数関数と三角関数の知識があればできることである。たとえば $\theta = \pi$ を代入してみると

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i\cdot 0 = -1$$

という計算はできる。このことから、不思議であるが非常に整った関係

$$\boxed{e^{\pi i} = -1}$$

が導かれる。ここには数学の重要な定数 e, π と、基本的な単位 $i, -1$ だけが使われていて、それらがうまく組み合って等式になているのである。

そもそも、オイラーの関係式を導くには、**テイラー級数**や**複素関数**に関する知識が必要だが、公式を信用して計算式として使う分にはそこまでの知識は不要である[2]。ここから先は、言わば “他人のふんどしで相撲を取る” ことになるけれど、オイラーの公式の周辺を見ることにしよう。

---
[1] レオンハルト・オイラー (1707–1783)：スイスの数学者・物理学者。
[2] ブルック・テイラー (1685–1731)：イギリスの数学者。テイラー展開などで功績。

$\log(-1)$ の値

最初は、等式 $e^{\pi i} = -1$ を見ることにしよう。$e^{\pi i} = -1$ という関係は、指数の関係である。指数の関係は同時に対数の関係をもっている。つまり

$$a^x = b \iff x = \log_a b$$

が成り立つ。このことから $e^{\pi i} = -1$ は

$$\boxed{\log(-1) = \pi i}$$

であるといえる。

実数の世界では、対数の真数に負の値を代入することはできなかったはずである。なぜなら、$y = \log x$ の逆関数である指数関数 $x = a^y$ は、正の値しかとらないからである。ところが、虚数を使えば対数関数の負の値が存在することになるのである。

いま、$e^{\pi i} = -1$ だけを視界に入れたわけだが、等式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ は

$$\theta = \pi,\ 3\pi,\ 5\pi,\ \ldots、\qquad \theta = -\pi,\ -3\pi,\ -5\pi,\ \ldots$$

のいずれでも正しい。それは

$$e^{\pi i} = e^{3\pi i} = e^{5\pi i} = \ldots = -1$$

を意味し、同時に

$$\log(-1) = \pi i,\ 3\pi i,\ 5\pi i,\ \ldots$$

といっていることになる。これは受け入れがたい結果だが、この正当性を論じるのは複素関数を学ぶまでお預けとなる。

i^i の値

オイラーの関係式に $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ を代入してみよう。すると

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i$$

である。テイラー級数や複素関数を知らなければ、どういう事情で $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$ になるのかは分からないのだが、気にせず先を行こう。ここで両辺を i 乗することにし、右辺から書き始めると

$$i^i \quad = \quad (e^{\frac{\pi}{2}i})^i$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{\frac{\pi}{2}i^2} \\
&= e^{-\frac{\pi}{2}} \\
&\approx 0.207879576
\end{aligned}
$$

と計算できる。虚数の計算に実数同様、指数法則を当てはめてよいかなど不確かな点はあるものの、そのようなことを認めるなら i^i は実数値になるということである。ちなみに、最後に数値を計算したところは Microsoft Excel に任せている。

◇	A	B	C	D	E	F
1	(※ **A1**)					
2						

※ セルの式
（**D1**） **=EXP(-PI()/2)**

ド・モアブルの定理

オイラーの関係式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ には θ が使われているが、θ は何も角度を表すわけではなく、一般の数値を意味している。そもそも角度 θ を弧度法で表すことは、θ に実数値を当てはめていたことを思い出してほしい。そこで数値 θ を $n\theta$ に書き換えることは何の問題もないであろう。すると

$$e^{i(n\theta)} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

となる。$e^{i(n\theta)} = (e^{i\theta})^n$ であり、$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ であるから、結局

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

が得られた。等式は、虚数単位を含む三角関数の和を n 乗することは、単に θ を n 倍することと同じであると言っている。複素数の積が偏角の和に通じていたことを思えば、自然な関係であるといえよう。これは**ド・モアブルの定理**と呼ばれる[3]。

複素関数

以上のように、複素数の計算から垣間見るものには不思議なことが多くある。ただし単発的な複素数の計算というものは、実際は複素関数の一部を切り取って眺めているに過ぎないのである。では、複素関数とは何であろうか。それは、定義域・値域ともに複素数であるような関数である。こ

[3]アブラハム・ド・モアブル (1667–1754)：フランスの数学者。

のことを複素数 z, w を用いて表すなら、$w = f(z)$ で済ますことができ、それは実数関数 $y = f(x)$ とさほど違わないように思える。

たしかに、たとえば $y = x^2$ の関係に複素数 $z = a + bi$ を代入すれば、それは複素関数 $w = f(z)$ である。そのため、式の上で複素関数の振る舞いを調べることは何とかなるものである。だからといって、それで複素関数の理解が深まるかというとそうでもない。それには相応の時間を要する。その理由のひとつに、視覚的補助を得にくい点がある。実数関数は定義域、値域ともに実数値であるから、定義域 x の数直線と値域 y の数直線を組み合わせて—実際は直角に交差させて—座標平面上に関数の姿を見ることができる。

それに対して、複素関数は定義域、値域ともに複素数の値をとるので、定義域 z の複素平面と値域 w の複素平面を組み合わせて、新たな空間—複素空間とでも呼べばよいだろうか—でなければ関数の姿を見ることができない。そして、複素空間は図示するのはほとんど無理である。

もっとも、いまここで複素関数の話を展開することはないので、この先の学習は別の機会の楽しみにとっておけばよいだろう。