$\sqrt{i}$ について

$\sqrt{i}$ という書き方はまったく不適切な表記であるが、言わんとするところは 2 乗して i になる数である。そのような数は、偏角と絶対値から知ることができる。まず、i の偏角は 90° であるから、2 乗して—すなわち偏角を 2 倍して—90° になる角 θ は 45° であることが分かる。また、$|i| = 1$ であるので、大きさにあたる r は 1 であることが分かる。これより

$$\sqrt{i} = 1 \cdot (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

となるであろう。

こう考えると $\sqrt{i}$ と書くことに問題はなさそうだが、i の偏角を 90° ではなく 450° と見れば、$\sqrt{i}$ の偏角はその $\dfrac{1}{2}$ にあたる 225° であるから

$$\sqrt{i} = 1 \cdot (\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

も正しいことになる。それなら $\sqrt{i} = \pm \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i \right)$ と定義してしまえばよさそうだが、それは記号の使い方としては正しくない。記号 $\sqrt{\ }$ が使われるのは、たとえば 2 の平方根は $x = \pm\sqrt{2}$ であるというときであるが、平方根という用語と $\sqrt{\ }$ という記号が同値なのではないからだ。

しかし、この単元に限り $\sqrt{a+bi}$ と書いた場合は、$a+bi$ の平方根を意味することにしたい。つまり、$a+bi$ の偏角を θ とすると、$\sqrt{a+bi}$ の偏角は $\dfrac{\theta}{2}$ と $\dfrac{360^\circ + \theta}{2}$ を考えることにするのである。そう考える理由は、後で 2 次方程式を解く際に明らかになるだろう。

$\sqrt{a+bi}$ について

複素数 $a+bi$ を偏角 θ を用いて表すことは、それほど簡単ではない。なぜなら、a、b の値から θ が $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$ を満たすことは確かのだが、では θ が何度かと問われても、即座にどのくらいの値か答えられないだろう。そうなると、$\sqrt{a+bi}$ のひとつの偏角 $\dfrac{\theta}{2}$ がどのくらいかも分からないことになるので、$\sqrt{a+bi}$ を偏角を利用して求めることは難しそうだ。

そこで $\sqrt{a+bi} = p + qi$（p、q は実数）であるとして、p, q を a, b を用いて表すことにしよう。まず両辺を 2 乗して整理すると

$$a + bi = (p^2 - q^2) + 2pqi$$

を得る。これより

$$a = p^2 - q^2, \quad b = 2pq$$

であるから、第 2 式より $q=\dfrac{b}{2p}$ を第 1 式へ代入して

$$a=p^2-\frac{b^2}{4p^2}、すなわち\quad 4p^4-4ap^2-b^2=0$$

を導くことができる。ここで $p,\,a,\,b$ は実数であるから、p^2 を未知数とみて 2 次方程式の解の公式にあてはめると

$$p^2=\frac{2a\pm\sqrt{4a^2+4b^2}}{4}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

を求めることができる。ここで分子の $a\pm\sqrt{a^2+b^2}$ においては、$a\leq\sqrt{a^2+b^2}$ であることと、$p^2>0$ でなければならないことに注意すると、$a-\sqrt{a^2+b^2}$ はあり得ないので

$$p^2=\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

が決まる。

次に、$q=\dfrac{b}{2p}$ であったので、両辺を 2 乗した $q^2=\dfrac{b^2}{4p^2}$ にいま求めた p^2 を代入して

$$q^2=\frac{b^2}{2(a\pm\sqrt{a^2+b^2})}=\frac{b^2(a\mp\sqrt{a^2+b^2})}{2\{a^2-(a^2+b^2)\}}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

を得る。ここでも p と同様

$$q^2=\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

が定まる。

しかし、p^2 と q^2 から p と q は正負 2 通りの解があるはずだが、$q=\dfrac{b}{2p}$ であったから、$b>0$ なら $p,\,q$ は同符号、$b<0$ なら $p,\,q$ は異符号でなければならない。また $b=0$ ならば、$\sqrt{a+bi}=\sqrt{a}$ であるから、a の正負による記述の仕方は今まで通りでよいので問題ないだろう。

つまり $p,\,q$ の組は

$b>0$ ならば

$$(p,\ q)=\left(\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}},\ \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)\quad（復号同順）$$

$b<0$ ならば

$$(p,\ q)=\left(\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}},\ \mp\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right)\quad（復号同順）$$

ということである。

以上より、$\sqrt{a+bi}$ を根号の中に i を含まない形—すなわち、一般的な複素数の形—で書くとしたら

$b>0$ の場合：

$$\sqrt{a+bi}=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+i\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\\-\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-i\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\end{cases}$$

$b=0$ の場合：

$$\sqrt{a+bi}=\sqrt{a}$$

$b<0$ の場合：

$$\sqrt{a+bi}=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}-i\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\\-\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}+i\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\end{cases}$$

とすればよいのである。

実際 $\sqrt{i}$ をこれに当てはめてみると、$b>0$ における $a=0$、$b=1$ の場合にあたるので、

$$\sqrt{i}=\sqrt{0+1i}=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1}{2}}+i\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\\-\sqrt{\dfrac{1}{2}}-i\sqrt{\dfrac{1}{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\end{cases}$$

となって、最初に考えた解と同じになっている。

解の公式について

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ には解の公式が存在して、使う機会が多い。その際、係数 a, b, c は実数であったのだが、係数が複素数の場合は解の公式は使えるのだろうか。結論から言えば、使える、である。それは、$ax^2+bx+c=0$ から解の公式を導く過程を見返してみれば分かることである。その手順は、両辺を a で割った後、両辺に $\dfrac{b^2}{4a^2}$ を加えることで平方式を作ることであった。すると等式は

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

に変形でき、両辺の平方根をとって解の公式にできたのである。

この等式を導く手順を振り返ると、行っている計算は係数に四則演算をほどこしているだけだと気づく。四則演算は複素数に対しても不自由なく行えるので、上述の変形は係数が複素数でも問題ないことになる。

しかし、その両辺の平方根をとることは、先に見たように適切ではない。ただし、$\sqrt{a+bi}$ を先のように定めておけば

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{複素数を係数とする 2 次方程式 } \alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \text{ の解は} \\ x=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\end{array}}$$

としてよいのである。

たとえば $(1+i)x^2+x+(1-3i)=0$ を解いてみよう。もちろん、このまま公式にあてはめてもかまわないのだが、共役複素数を両辺に掛けることで x^2 の係数を実数にしておくと解きやすい。すなわち両辺に $(1-i)$ を掛けて、$2x^2+(1-i)x+(-2-4i)=0$ に解の公式をあてはめるとよい。よって

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(1-i)\pm\sqrt{(1-i)^2-4\cdot 2(-2-4i)}}{2\cdot 2} \\ &= \frac{-1+i\pm\sqrt{16+30i}}{4} \quad (※) \end{aligned}$$

である。ここで、$\sqrt{16+30i}=\sqrt{a+bi}$ においては $b>0$ にあたるので、

$$\sqrt{16+30i}=\begin{cases} \sqrt{\dfrac{16+\sqrt{1156}}{2}}+i\sqrt{\dfrac{-16+\sqrt{1156}}{2}} \\ -\sqrt{\dfrac{16+\sqrt{1156}}{2}}-i\sqrt{\dfrac{-16+\sqrt{1156}}{2}} \end{cases}$$

の 2 通りの値になるのだが、この 2 通りの値は正負の違いしかない。そして x を求める際には $\pm\sqrt{16+30i}$ を計算することになるので、結局片方の値だけ用いて x を求めればよいことになる。1 番目の値を（※）へ戻すことにして、$\sqrt{1156}=34$ に注意すると

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1+i\pm\left(\sqrt{\dfrac{16+\sqrt{1156}}{2}}+i\sqrt{\dfrac{-16+\sqrt{1156}}{2}}\right)}{4} \\ &= \frac{-1+i\pm\left(\sqrt{\dfrac{16+34}{2}}+i\sqrt{\dfrac{-16+34}{2}}\right)}{4} \\ &= \frac{-1+i\pm(5+3i)}{4} \\ &= 1+i,\quad -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i \end{aligned}$$

を求めることができるのである。

もっとも、このようにきれいな根が求められるのは、いささか作為的な方程式に解の公式を当てはめたからに他ならない。それは、$x^2-5x+6=0$ に解の公式を当てはめたとき、うまい具合に

根号がはずせる値になって $x=2,\,3$ が求められるようなものだ。勝手な 2 次方程式を解けば、必ずしも根号がはずせると限らないように、複素係数の 2 次方程式を解の公式で解けば、必ず 2 重根号がはずせるわけではない。