虚数単位 i

複素数に関する計算や方程式を見てきたが、そもそも虚数単位 i は何であろうか。i は始め、$x^2=-1$ を満たすものとして導入されたことを思い出すだろう。すなわち i 自体の正体は分からないものの、$i^2=-1$ であると定義したのである。

ところで $a>0$ のとき、方程式 $x^2=a$ の解は $x=\pm\sqrt{a}$ であった。とくに正の値だけに限定するなら $x=\sqrt{a}$ となる。もし方程式 $x^2=a$ について、a の正負を考えず機械的に解いて、正の値だけ限定して求めるなら $x=\sqrt{a}$ と書いてよいだろう。ここで $a=-1$ とすれば、$x^2=-1$ の正の解は機械的に $x=\sqrt{-1}$ と書けることになる。

一方で i の性質から、方程式 $x^2=-1$ に $x=i$ を代入することができる。なぜなら $i^2=-1$ だからである。すなわち、$x^2=-1$ を満たす x の値のひとつに $x=i$ があり、また機械的に方程式を解いて $x=\sqrt{-1}$ と書くことができるなら

$$\boxed{i=\sqrt{-1}}$$

ということである。

このことは $a>0$ とした場合、方程式 $x^2=-a$ を満たす x の値のひとつとして $x=\sqrt{a}\,i$ を見つけることができ、なおかつ機械的に方程式を解いて $x=\sqrt{-a}$ と書けることから、$\sqrt{a}\,i=\sqrt{-a}$ という関係を導くことができる。ここで $a<0$ であれば、方程式 $x^2=-a$ は単に $x^2=(\text{正の値})$ を解くだけにすぎず、虚数単位 i には無縁であるから $a>0$ という条件は必須であると考えてよい。すなわち

$$\boxed{a>0\text{ のとき、}\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i}$$

であるといえる。

ここで具体的な数値で考えてみると、$\sqrt{-2}=\sqrt{2}\,i$、$\sqrt{-9}=3i$ などがすぐに思い浮かぶであろう。ところで、これらの等式が主張していることは、$\sqrt{-2}$ という表記と $\sqrt{2}\,i$ という表記が同じであることだけである。決して

$$\sqrt{-2}=\sqrt{2\cdot(-1)}=\sqrt{2}\sqrt{-1}=\sqrt{2}\,i$$

のような計算をして求めたのではないことに注意してほしい。計算上はつじつまが合っているように見えても、$\sqrt{-2}=\sqrt{2}\,i$ であることは計算ではなく、定義なのである。

*　　*　　*

一見したところ

$$\sqrt{-2}=\sqrt{2\cdot(-1)}=\sqrt{2}\sqrt{-1}=\sqrt{2}\,i$$

という計算はどこにも間違いがないように思える。たしかに $-2=2\cdot(-1)$ であることは間違いないので、$\sqrt{-2}=\sqrt{2\cdot(-1)}$ は正しいのである。いまや根号内に負の数があっても、それは認められている。また、$\sqrt{2}\sqrt{-1}=\sqrt{2}\,i$ も正しい。定義通りであるからだ。

この計算のまずいところは $\sqrt{2\cdot(-1)}=\sqrt{2}\sqrt{-1}$ としたところである。平方根の計算を習い始めたとき、たしか $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ が成り立っていたと言うかもしれないが、それは $a>0$、$b>0$ の条件の下にあったことを確認してほしい。残念ながら $\sqrt{2\cdot(-1)}$ は条件を満たしていない。それでも正しい答えが出ているのは、幸運な状況にあるに過ぎないのである。

そのことがはっきり分かるのは

$$\sqrt{2}=\sqrt{(-2)(-1)}=\sqrt{-2}\sqrt{-1}=\sqrt{2}\,i\cdot i=\sqrt{2}\,i^2=-\sqrt{2}$$

と計算したときであろう。この結果は明らかに間違っている。間違いの原因はただ一カ所、$\sqrt{(-2)(-1)}=\sqrt{-2}\sqrt{-1}$ としたところである。念のために指摘すると、ここ以外の等号の箇所はすべて正しい。それらは定義通りに計算しているからだ。

したがって

$$\overbrace{\sqrt{2}=\sqrt{(-2)\cdot(-1)}}^{\text{ここまでは正しい}}\neq\overbrace{\sqrt{-2}\sqrt{-1}=\sqrt{2}\,i\cdot i=\sqrt{2}\,i^2=-\sqrt{2}}^{\text{この先も正しい}}$$

という状況になっているのである。結局、定義をきちんと守ることで $\sqrt{2}=\cdots=-\sqrt{2}$ などという矛盾が排除されるのである。▮

2 次方程式の解の公式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は、$a\neq 0$ のとき $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ で与えられた。このとき b^2-4ac が負の値になったら、方程式には解がなかったはずである。それは解の公式を導いた過程を思い出せば分かるだろうが、解の公式は

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

の平方根をとって得られるので、右辺が負—すなわち $b^2-4ac<0$ —であってはならなかったからだ。

そのため式 b^2-4ac は**判別式**と呼ばれていて、方程式の解の存在を知る手がかりになっている。簡単のため $D=b^2-4ac$ とおくと、D の正負によって 2 次方程式は

$D>0$ のとき　異なる 2 つの実数解をもつ

$D=0$ のとき　重解をもつ

$D<0$ のとき　解なし

となることが分かっていた。

しかし、いまやその考えは当てはまらない。$D<0$ のときは、$\sqrt{D}=\sqrt{-(-D)}$ と見たとき $-D>0$ であるから、$\sqrt{-(-D)}=\sqrt{-D}\,i$ とできるのである。よって、判別式 D による 2 次方程式の解の存在は

$D<0$ のとき　異なる 2 つの虚数解をもつ

ということができる。

これまでならば $x^3-1=0$ の解は、$(x-1)(x^2+x+1)=0$ より $x=1$ だけを解としてきたはずだが、これからは $x^2+x+1=0$ からも

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$$

なる 2 つの虚数解が得られるのである。

とくに解に虚数解が現れるときは、根号のあるなしに関わらず 2 つの解は必ず $a\pm bi$ の形になる。いまの例なら $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ということである。このことから、判別式 D による 2 次方程式の解の存在は、

$D<0$ のとき　互いに共役な虚数解をもつ

と言ったほうが的を射ているかもしれない。

高次の方程式

方程式 $x^4=-1$ を考えよう。これは $x^4+1=0$ に少し手を加えて

$$\begin{aligned}
x^4+2x^2+1-2x^2 &= 0 \quad (2x^2\text{を加えて、}2x^2\text{を引いた})\\
(x^2+1)^2-2x^2 &= 0 \quad (\text{部分的に因数分解})\\
(x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x) &= 0 \quad (\text{全体的に因数分解})
\end{aligned}$$

のように変形した後、解の公式を用いて

$$x^2+\sqrt{2}x+1=0,\quad x^2-\sqrt{2}x+1=0$$

を解けばよい。結果は、それぞれ

$$x=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i}{2},\quad x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}\,i}{2}$$

となる。

ところが $x^4=-1$ に機械的に根号をかぶせると、方程式は一旦 $x^2=\pm\sqrt{-1}=\pm i$ と解くことができ、さらに $x^2=i$ からは $x=\pm\sqrt{i}$、$x^2=-i$ からは $x=\pm\sqrt{-i}$ となるであろう。しかし、これはあくまでも機械的操作であって、$\sqrt{i}$ という表現が意味を持つのかとか、たとえ意味を持っても $\sqrt{-i}$ を $\sqrt{i}\,i$ としてよいのかなど、不明な点が多い。

そこで複素数の極形式を用いて、方程式を見直すことにする。

極形式で方程式を解く

$x^4=-1$ の解が複素数 $a+bi$ であるとすると、方程式を解くことは $(a+bi)^4=-1$ を満たす複素数を求めることである。しかしここでは複素数の解 $a+bi$ を極形式で見た $x=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ で考えることにする。こうすることで解の位置を、x 軸と y 軸の目盛が交差するところではなく、原点からの距離と回転に置き換えることができるからである。

さて $x^4=-1$、すなわち $r^4(\cos\theta+i\sin\theta)^4=-1$ であるが、複素数どうしの積では

$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

が成り立っていたので、$(\cos\theta+i\sin\theta)^2$ なら

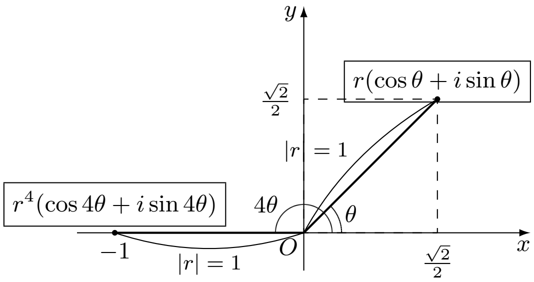
$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^2 &= (\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)\\ &= \cos(\theta+\theta)+i\sin(\theta+\theta)\\ &= \cos 2\theta+i\sin 2\theta\end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^4 &= (\cos\theta+i\sin\theta)^2(\cos\theta+i\sin\theta)^2\\ &= (\cos 2\theta+i\sin 2\theta)(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)\\ &= \cos(2\theta+2\theta)+i\sin(2\theta+2\theta)\\ &= \cos 4\theta+i\sin 4\theta\end{aligned}$$

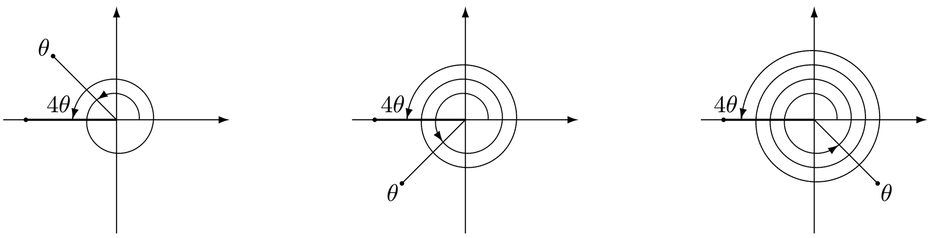
である。これより帰納的に、$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ が予想されるが、このことは後で述べることにし、いまは方程式を解くことを優先しよう。

さて、その方程式 $x^4=-1$ を解くことは、$x=\cos\theta+i\sin\theta$ であることと、いま得たことから、$\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^4=r^4(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=-1$ を満たす r と θ の組を求めることである。



それは図のような関係であるから $\theta = 45°$、すなわち $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ が求める解である。たしかに解の公式で求めた解のひとつに違いない。では、残りの解はどこにあるのだろうか。

実は $4\theta = 180°$ と見たことが曲者で、$\cos 4\theta + i\sin 4\theta = -1$ を満たす偏角は何も $180°$ に限らないのである。



図から分かるように、

$$4\theta = 540° \text{なら} \quad \theta = 135°$$
$$4\theta = 900° \text{なら} \quad \theta = 225°$$
$$4\theta = 1260° \text{なら} \quad \theta = 315°$$

であるから、それぞれの偏角に対する複素数が

$$\cos 135° + i\sin 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$\cos 225° + i\sin 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$\cos 315° + i\sin 315° = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

になっているのである。これで解の公式から得た解と一致した。