立方根

一般に n 次方程式 $x^n = 1$ を考えてみよう。n の値により

$$x = 1, \quad x^2 = 1, \quad x^3 = 1, \quad x^4 = 1, \quad x^5 = 1, \quad \ldots$$

といくらでも方程式ができる。1 は何乗しても 1 であるから、基本的に解は $x = 1$ である。ただし、$(-1)^2 = 1$ でもあるので、n が偶数なら $x = -1$ も解である。単純な発想で済ませてしまえば、$x^n = 1$ からは 1 か -1 の解しか得られないように見えるが実際はそうではない。

$x^3 = 1$ から考えてみよう。これは 3 次方程式 $x^3 - 1 = 0$ である。方程式は因数分解ができるなら、それを利用して解くと解が求めやすい。実際

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= 0 \\ (x-1)(x^2+x+1) &= 0 \end{aligned}$$

と因数分解することで

$$x - 1 = 0, \quad x^2 + x + 1 = 0$$

を満たす x を解の公式などを用いて解けば

$$x = 1, \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$

のように 3 つの解が求められる。

このことから $x^3 = 1$ の解には、それほど明らかでない複素数が解として存在していることが分かる。これら 3 つの値は、いずれも 3 乗すると 1 になることから **1 の立方根**と呼ばれている。立方根に限らず、n 乗（$n \geq 2$）して a になる数は一般に **a の n 乗根**と呼ばれるが、$n = 2$ のときと $n = 3$ のときだけ平方根と立方根と言う習慣がある。a の n 乗根は記号で $\sqrt[n]{a}$ と書く。ただし $\sqrt[2]{a}$ は $\sqrt{a}$ と書く。数学では珍しい、2 が省略される例である。

* * *

ここで、解（かい）と根（こん）について触れておこう。解も根も方程式を満たす値を指していることは間違いないが、次の点で違いがある。解は方程式 $f(x) = 0$ を解いて得られる、$f(x) = 0$ を満たす x の値である。一方で、根は方程式 $f(x) = 0$ に含まれる、$f(x) = 0$ を満たす x である。似た表現だけに違いを区別しにくいだろう。具体的に方程式 $(x-1)^2 = 0$ についていえば、方程式を満たす x の値は 1 しかないから、解は $x = 1$ といえる。一方で、方程式は $(x-1)(x-1) = 0$ であるから、方程式を満たす x は 2 つの 1 であるといえる。ただし、どちらにしても $x = 1$ が方程式を満たすことに変わりないので、いまでは解も根も区別せずに、一般に “解” だけで済ませているようだ。▮

a の平方根の場合は単に根号をつけて $\sqrt{a}$ とし、そのうち正の値を $\sqrt{a}$、負の値を $-\sqrt{a}$ で表したが、立方根の場合は複素数が現れるので、単純に $\sqrt[3]{a}$ に符号を付けて区別することはできない。したがって、$\sqrt[3]{1}$ や $\sqrt[3]{27}$ は実数値を表すものとし、$\sqrt[3]{1}=1$、$\sqrt[3]{27}=3$ と解釈する。よって、$\sqrt[3]{1}$ や $\sqrt[3]{27}$ が複素数の値を意味することはない。

このことは、どんな n 乗根についても言えることであるが、n の偶奇により多少の違いがあることを指摘しておこう。n が偶数なら $a>0$ でなければならない。そのもとで、正の n 乗根が $\sqrt[n]{a}$、負の n 乗根が $-\sqrt[n]{a}$ となる。n が奇数なら $a<0$ でもかまわない。$\sqrt[3]{27}=3$、$\sqrt[3]{-27}=-3$ からも分かるように、$a>0$ なら $\sqrt[n]{a}$ が正の値、$a<0$ なら $\sqrt[n]{a}$ が負の値になるだけだからである。

1 の立方根

では 1 の立方根のうち、1 以外の数は根号を用いて表すことはできないのだろうか。結論としては、そのための新たな根号を用意すれば表せるのだが、実際は新たな根号を用いて表すことはしていない。そのかわり、1 の立方根のひとつを ω で表すことにしている[1]。注意してほしいのは、ω は 1 以外の立方根のどちらかひとつを特定しない点である。そのため ω は、$\omega=$（何々）という値ではなく、ただ $\omega^3=1$ を満たす某（なにがし）かの値—ただし $\omega\neq 1$—という意味で使うのである。

さて、こんな不明瞭なことで何に役立つのだろう。ひとつだけ特徴的な例を示すことにしよう。まず 1 の立方根のひとつに $\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ があるが、これが確かに 1 の立方根であることを確認するには、$\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3$ を計算して 1 になることを確かめればよい。実際

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3 &= \frac{-1+3\sqrt{3}\,i-9i^2+3\sqrt{3}\,i^3}{8} \\
&= \frac{-1+3\sqrt{3}\,i+9-3\sqrt{3}\,i}{8} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

となっている。

それよりも、$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とおいて確かめる方が簡単である。ω は $x^2+x+1=0$ の解であったので $\omega^2+\omega+1=0$ を満たしている。すなわち

$$
\boxed{\omega^2=-\omega-1}
$$

[1] ω はギリシア文字で “オメガ” と読む。

を満たしている。このことを踏まえて ω^3 を計算すると

$$\begin{aligned} \omega^3 &= \omega^2\cdot\omega \\ &= (-\omega-1)\omega && (\omega^2=-\omega-1\text{ を代入}) \\ &= -\omega^2-\omega && (\text{展開}) \\ &= -(-\omega-1)-\omega && (\omega^2=-\omega-1\text{ を代入}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となって、確かに $\omega^3=1$ であることが分かるのである。

ところで、$\omega^2=-\omega-1$ であるが、実は ω^2 も $x^3=1$ の根のひとつ、すなわち 1 の 3 乗根である。そのことは、ω^2 を 3 乗して 1 になることを確かめればよい。実際

$$(\omega^2)^3=\omega^6=(\omega^3)^2=1^2=1$$

となることで確かめられる。以上のことから

$$\boxed{1\text{ の 3 乗根は、}1,\,\omega,\,\omega^2\text{ である}}$$

ことが結論づけられた。

ω を使うと、他にも便利なことがある。たとえば $x^3=27$ において $27=3^3\cdot 1$ と見ると、$1=\omega^3$ または $1=(\omega^2)^3$ だから、$27=3^3\omega^3=(3\omega)^3$ または $(3\omega^2)^3$ である。このことから 27 の立方根は、$3,\,3\omega,\,3\omega^2$ であるといえる。一般に

$$\boxed{a\text{ の 3 乗根は、}\sqrt[3]{a},\ \sqrt[3]{a}\,\omega,\ \sqrt[3]{a}\,\omega^2\text{ である}}$$

ことが分かる。

4 乗根

1 の 4 乗根を求めてみよう。それは $x^4-1=0$ を解くことで求められる。実際

$$\begin{aligned} (x^2-1)(x^2+1) &= 0 \\ (x-1)(x+1)(x-i)(x+i) &= 0 \end{aligned}$$

という因数分解によって、$x=\pm1,\,\pm i$ の 4 つの根が 1 の 4 乗根であることが分かる。一般に因数分解は、実数を係数・定数とする多項式の積にするものだが、ときに複素数を用いて因数分解することもある。これはその例になっている。

n 乗根

この先、5 乗根、6 乗根、. . . と続けてもよいのだが、その都度方程式の解き方を工夫しなければならず、あまりよい方法ではない。ここでは、複素数が大きさと偏角で表されることを使って、n 乗根の解法を探ってみることにする。

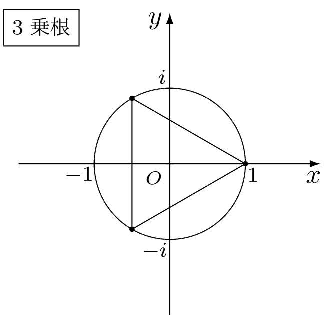
まず、$x^n = 1$ の根の大きさが 1 であることから、すべての n 乗根は $\cos\theta + i\sin\theta$ で表されるはずである。実際、3 乗根である 1, $\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$ はそれぞれ

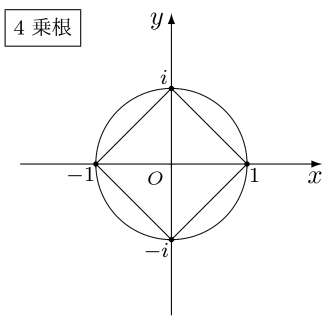
$$1 = \cos 0^\circ + i\sin 0^\circ$$
$$\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2} = \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ, \qquad \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2} = \cos 240^\circ + i\sin 240^\circ$$

と書ける。また、4 乗根である ± 1, $\pm i$ はぞれぞれ

$$1 = \cos 0^\circ + i\sin 0^\circ, \quad -1 = \cos 180^\circ + i\sin 180^\circ$$
$$i = \cos 90^\circ + i\sin 90^\circ, \quad -i = \cos 270^\circ + i\sin 270^\circ$$

と書ける。これだけを見ても何となく傾向はつかめるが、複素平面に描いてみるとはっきりるする。





3 乗根は半径 1 の円周上の点で表され、それらは正三角形の頂点を形作っていることが分かる。同様に、4 乗根は正方形の頂点を形作っている。このことは、複素数の累乗が偏角の倍数になっていることが影響している。たとえば 3 乗根は、3 乗して 1 になるのだから、偏角が 3 倍されて 360° になることを意味する。それは同時に 720°, 1080°, . . . という偏角であってもよい。すなわち 3 乗根の偏角 θ は、

$$3\theta = 360^\circ,\ 720^\circ,\ 1080^\circ,\ \ldots$$

を満たすものであればよいので、

$$\theta = 120^\circ,\ 240^\circ,\ 360^\circ$$

の 3 つの根になるのである。

同じ理屈で 4 乗根は

$$4\theta = 360^\circ,\ 720^\circ,\ 1080^\circ,\ 1440^\circ,\ \ldots$$

を満たす

$$\theta = 90^\circ,\ 180^\circ,\ 270^\circ,\ 360^\circ$$

の 4 つの根になるのである。

このことから一般に、$x^n = 1$ の根 x の偏角 θ は

$$\boxed{\theta = \frac{360^\circ}{n},\quad \frac{360^\circ}{n}\times 2,\quad \frac{360^\circ}{n}\times 3,\quad \ldots,\quad \frac{360^\circ}{n}\times(n-1),\quad 360^\circ}$$

の n 個であるといえる。したがって、$x^n = 1$ の根は n 個である。

* * *

この節の途中までは、偏角 θ は $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ の立場をとってきたのに、ここに来て $0^\circ < \theta \leq 360^\circ$ の立場になっていることに気づいただろうか。結果的にはどちらも同じであるが、私は $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ の方がおさまりがよいと思う。ただ、θ の約数、倍数を考えるなら 0° を含めない方が直接的で分かりやすいだろう。それは、1 の n 乗根を複素平面に表すために、Microsoft Excel を利用する場合にも当てはまる。

◇	A	B	C	D	E	F
1	3	乗根は	（※ **C1**）	（※ **D1**）	（※ **E1**）	
2			↓下へコピーする	↓下へコピーする	↓下へコピーする	
3			↓下へコピーする	↓下へコピーする	↓下へコピーする	
4			↓下へコピーする	↓下へコピーする	↓下へコピーする	
5			↓下へコピーする	↓下へコピーする	↓下へコピーする	
6			↓下へコピーする	↓下へコピーする	↓下へコピーする	
7			↓下へコピーする	↓下へコピーする	↓下へコピーする	
8			↓下へコピーする	↓下へコピーする	↓下へコピーする	

※ セルの式

（**C1**） **=IF(ROW()>$A$1,"",COS(2*PI()*ROW()/$A$1))**

（**D1**） **=IF(ROW()>$A$1,"",SIN(2*PI()*ROW()/$A$1))**

（**E1**） **=IF(ROW()>$A$1,"","i")**

C, D, E 列に入力する数式が少し込み入っているのは、A1 セルに入力する値によって、必要な値だけを表示させるためである。たとえば、A1 セルが 3 ならば 3 行めまで、12 ならば 12 行めまでがきっちり表示される。値が表示されたら、C, D 列に表示された値を範囲指定して、挿入メニューから “グラフ” を選択する。そこで “散布図” を選択すると、複素平面ではないがそれに近いグラフが表示されるはずである。∎