加法・減法の意味

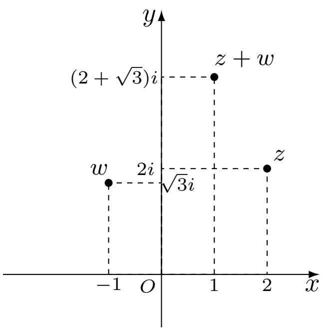
複素数の加法と減法は、単に実部と虚部の加法と減法であった。計算をする際はこれで十分なのであるが、ここでは複素数の加法と減法が持つ意味を、複素平面で考えてみよう。具体的に

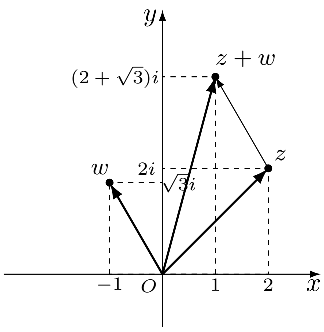
$$z = 2 + 2i, \quad w = -1 + \sqrt{3}\, i$$

とすると

$$z + w = 1 + (2 + \sqrt{3})i$$

であることは、すぐに分かることである。そこで z、w、$z + w$ を複素平面上にとってみても、なぜ $z + w$ が図のような位置に現れるのか、よく分からないであろう。





しかし複素数を、点ではなくベクトルであると考えると $z+w$ がその位置に現れる必然性が見えてくる。なぜなら、ベクトルの加法は矢線の継ぎ足しだからである。複素数の加法は $(a+bi)+(c+di) = (a + c) + (b + d)i$ からも分かるように、たしかに複素平面上の作図に一致している。

乗法・除法の意味

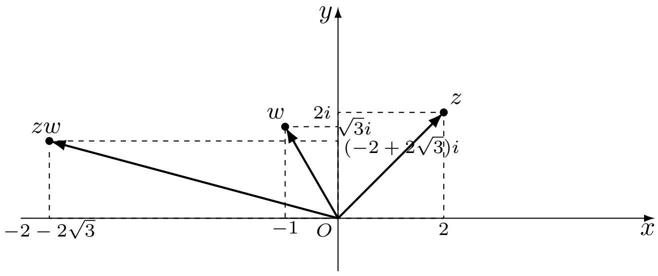
複素数の乗法についてもベクトルで考えることにしよう。加法のときと同じ複素数

$$z = 2 + 2i, \quad w = -1 + \sqrt{3}\, i$$

について zw を計算すると

$$zw = (-2 - 2\sqrt{3}) + (-2 + 2\sqrt{3})i$$

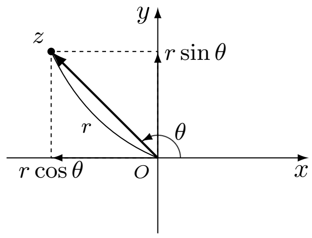
であることは、簡単な計算で分かる。ここでも z、w、zw を複素平面上のベクトルとして見ることにしよう。



しかしこの場合は、ベクトルで見てもなぜ zw が図のような位置に現れるかが分からないと思われる。そこには複素数を $a+bi$ と見るだけでは分からない事情があるのである。

複素数の極形式

複素数は $a+bi$ で表されることから、ひとつの数を特定するのに 2 つの実数値を必要とする。このことは、複素平面上に示された複素数を見ても分かることである。複素数を複素平面上の点と見た場合、実部 a と虚部 b の組で表すことは自然な考えのように思える。しかし複素数をベクトルと見れば、違う視点から複素数を特定することができる。



ベクトルは大きさ r を持ち、x 軸からの回転量 θ も決まるので、複素数を特定するのに $r>0$ と θ を使うこともできる。ただし、θ は任意の値をとれるのだが、ここでは $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ としておこう。このように考えると、実部の値はベクトルの x 軸の値である $r\cos\theta$、虚部の値はベクトルの y 軸の値である $r\sin\theta$ であるから、

$$\boxed{z = r\cos\theta + r\sin\theta\cdot i = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

と書くこともできる。これは**極形式**による表し方という。その際、回転量にあたる θ を、z の**偏角**（へんかく）と呼ぶ。

複素数を極形式で表しておくと、$|z|$—すなわち z の大きさにあたる—は

$$|z| = \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} = \sqrt{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = r$$

であるから、$|z|=r$ となって大きさを見るときに都合がよい。

積と回転

そこで、改めて $z=2+2i$ と $w=-1+\sqrt{3}\,i$ を極形式に直してみると

$$z=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=2\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$$

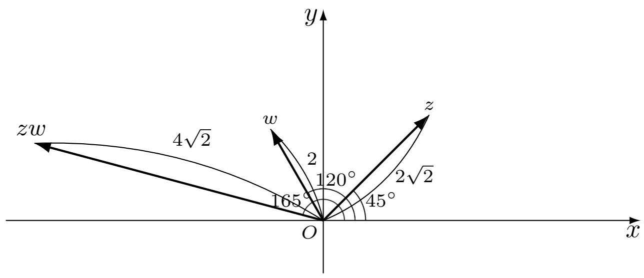
$$w=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$$

であることが分かる。z では $2\sqrt{2}$ を、w では 2 を ( ) の外に出して極形式に直した理由は、$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ だから、$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right)$ とすることで $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\theta$、$\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\theta$ を見つけられるのである。

また、$zw=(-2-2\sqrt{3})+(-1+2\sqrt{3})i$ を極形式に直してみると

$$zw=4\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i\right)=4\sqrt{2}(\cos 165^\circ+i\sin 165^\circ)$$

である。$\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}=165^\circ$ というのは、三角比の単元でも述べたが、15° に対する sin、cos の値から分かることである。



このようにして複素平面に z、w、zw を描いてみると、2 つの複素数とその積の関係が浮かんでくる。掛けることによって不自然な位置に現れたかに見えた複素数であるが、大きさにあたる $|zw|$ は $|z|$ と $|w|$ の積であり、偏角 165° は 45° と 120° の和であることが見て取れる。このことから一般に

$$\boxed{\begin{aligned} &z=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\quad w=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\ &\Rightarrow\qquad zw=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}\end{aligned}}$$

が成り立つ。複雑な式に見えるが、

複素数の積は、大きさの積と偏角の和で計算される

ことを意味しているのである。

商と回転

$zw = zw$ より $z = \dfrac{zw}{w}$ である。ここで、それぞれの複素数を極形式表すと

$$\begin{aligned} z &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \\ zw &= r_1 r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\} \\ w &= r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \end{aligned}$$

である。まず $r_1 = \dfrac{r_1 r_2}{r_2}$ の関係は、(z の絶対値) $=$ $\left(\dfrac{zw}{w}\text{の絶対値}\right)$ と読める。また、$\theta_1 = (\theta_1+\theta_2)-\theta_2$ の関係は (z の偏角) $=$ (zw の偏角) $-$ (w の偏角) と読める。これは

$$\boxed{\text{複素数の商は、大きさの商と偏角の差で計算される}}$$

ことを意味しているので、改めて $z = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$、$w = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ に書き直せば

$$\boxed{\begin{aligned} & z = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad w = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ \Rightarrow \quad & \frac{z}{w} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\} \end{aligned}}$$

という関係式になるのである。

*　*　*

複素数を複素平面上に見ることができるということは、$a+bi$ を平面上の座標のように $(a,\ b)$ と見られることを意味する。このことから複素数の表現は $a+bi$ に限らなくてもよいのである。ここで $(a,\ b)$、$(c,\ d)$ を 2 つの複素数であるとみなして四則計算を適用すると

$$\boxed{\begin{aligned} (a,\ b)+(c,\ d) &= (a+c,\ b+d) \\ (a,\ b)-(c,\ d) &= (a-c,\ b-d) \\ (a,\ b)(c,\ d) &= (ac-bd,\ ad+bc) \\ (a,\ b)/(c,\ d) &= \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right) \end{aligned}}$$

と書いてよい。

いま、とくに乗法である $(a,\ b)(c,\ d) = (ac-bd,\ ad+bc)$ に注目することにしよう。まず、この表現では $i = (0,\ 1)$ であるから

$$(0,\ 1)(0,\ 1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1,\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,\ 0)$$

であること、すなわち $i^2 = -1$ がすぐに分かる。

ところでプログラミング言語の中には、複素数を扱えるものもあるのだが、コンピュータ上で何らかの計算をするソフトウェアは、大抵複素数が扱えない。しかし、たとえば Microsoft Excel などでは、上の結果を利用すれば、一応複素数が扱えることになるのである。

◇	A	B	C	D	E	F
1	z=	1	3	i		
2	w=	2	-1	i		
3						
4	z+w=	(※ **B4**)	(※ **C4**)	i		
5	z-w=	(※ **B5**)	(※ **C5**)	i		
6	zw=	(※ **B6**)	(※ **C6**)	i		
7	z/w=	(※ **B7**)	(※ **C7**)	i		
8						

※ セルの式
（B4）　=B1+B2
（C4）　=C1+C2
（B5）　=B1-B2
（C5）　=C1-C2
（B6）　=B1*B2-C1*C2
（C6）　=B1*C2+C1*B2
（B7）　=(B1*B2+C1*C2)/(C2*B2+C2*C2)
（C7）　=(C1*B2-B1*C2)/(B2*B2+C2*C2)

表は $z=1+3i$、$w=2-i$ として、$z+w$、$z-w$、zw、$\dfrac{z}{w}$ を計算する例である。役立ち度は低いかもしれないが、まったく使い道がないわけでもないだろう。∎