共役複素数の性質

　複素数は $a+bi$ のように実部と虚部の 2 の要素を用いて表してきたが、複素数自体はひとつの数なのだから、たとえばひとつの文字 z で表す方が自然なこともある。$z=a+bi$ としたとき、z の共役複素数を $\overline{z}$ で表すことにしよう[1]。では、共役複素数の組にはどんな性質があるだろうか。$z=a+bi$、$w=c+di$ として調べてみよう。

　最初に

$$\boxed{\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w} \qquad (*)}$$

であることを示そう。等式は、線の引き方がちょっと違っているだけであるが、これは

「和 $z+w$ の共役複素数」は「z の共役複素数と w の共役複素数の和」に等しい

と読む。左辺は先に z と w の和を求めてから共役複素数をとっているのに対し、右辺は z と w の共役複素数をそれぞれとってから和を求めていることに注意してほしい。似ているようで、演算の順序がまったく逆なのである

　さて、そのことは

$$\begin{aligned}
\overline{z+w} &= \overline{(a+bi)+(c+di)} \\
&= \overline{(a+c)+(b+d)i} && \text{（実部と虚部をまとめた）} \\
&= (a+c)-(b+d)i && \text{（共役複素数の定義）} \\
&= (a-bi)+(c-di) && \text{（整理し直した）} \\
&= (\overline{a+bi})+(\overline{c+di}) && \text{（共役複素数の定義）} \\
&= \overline{z}+\overline{w}
\end{aligned}$$

というようにして示すことができる。やや冗長な印象を受けるだろうが、共役複素数の定義だけから導いているので、きちんとした証明になっているのである。

　次に、

$$\boxed{\overline{zw}=\overline{z}\,\overline{w} \qquad (**)}$$

が成り立つことを示しておく。これは

「積 zw の共役複素数」は「z の共役複素数と w の共役複素数の積」に等しい

[1] $\overline{z}$ は「z バー」と読んだりすることが多い。

と読む。ここでも、積の計算と共役複素数をとる順が違うことに注意してほしい。

その証明も、共役複素数の定義を利用するだけである。すなわち、

$$
\begin{aligned}
\overline{zw} &= \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} && \text{（複素数の積の計算）} \\
&= (ac-bd)-(ad+bc)i && \text{（共役複素数の定義）} \\
&= ac-bd-adi-bci && \text{（展開）} \\
&= ac+bdi^2-adi-bci && \text{（}-bd\text{ を }+bdi^2\text{ と見た）} \\
&= (a-bi)(c-di) && \text{（因数分解）} \\
&= (\overline{a+bi})(\overline{c+di}) && \text{（共役複素数の定義）} \\
&= \overline{z}\,\overline{w}
\end{aligned}
$$

のようにして示すことができる。

* * *

複素数に文字 z をあてがったのは単に習慣である。数学では習慣として、定数に $a, b, c, \ldots$ の文字を、未知数や変数に x, y, z の文字をあてがうことが多い。未知数としての複素数を考えたとき、未知数という理由で x をあてがってもよかったのだろうが、おそらく x や y は実数の未知数としてよく目にするので、z を用いたのではないだろうか。そうすると、もうひとつ複素数を使いたくなったときにあてがう文字をどうするかと考えたとき、近くに w があったということであろう。ちなみに、定数としての複素数にあてがう文字は α, β などをよく使うようである。▮

共役複素数と絶対値

次に、共役複素数の組と絶対値の関係を見ることにしよう。$z = a + bi$ のとき、$\overline{z} = a - bi$ である。このとき $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ であり、$|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ であるから

$$\boxed{|z| = |\overline{z}|}$$

が成り立っている。また、

$$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = |z|^2$$

であるから

$$\boxed{z\overline{z} = |z|^2 \qquad (\dagger)}$$

ということも成り立っている。

たったこれだけのことなのだが、これだけを用いて 2 つの複素数 z、w に

$$\boxed{\begin{array}{c}|zw| = |z||w| \\[1ex] \left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}\end{array}}$$

の関係が成り立つことを説明してみよう。式を見ただけでは等式が何を意味しているかつかめないかもしれないが、これらは

「積 zw の絶対値」は「z の絶対値と w の絶対値の積」に等しい

「商 $\dfrac{z}{w}$ の絶対値」は「z の絶対値と w の絶対値の商」に等しい

という言葉が式になったものである。要するに絶対値をとるのが、積や商の計算の前になるか後になるかの違いである。

では、$|zw| = |z||w|$ を示そう。$|z|$ の値が負になることはないので、$|zw|^2 = |z|^2|w|^2$ を示しても同じことである。

$$\begin{aligned} |zw|^2 &= (zw)(\overline{zw}) && \text{((†) より)} \\ &= zw\,\overline{z}\,\overline{w} && \text{((*) より)} \\ &= z\overline{z}\,w\overline{w} && \text{(積の交換)} \\ &= |z|^2|w|^2\,. && \text{((†) より)} \end{aligned}$$

次に $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$ を示すために、変わったところから始めてみよう。

$$\begin{aligned} |z| &= \left|\frac{z}{w}\,w\right| && \text{(z の見直し)} \\ &= \left|\frac{z}{w}\right||w|\,. && \text{(上の性質より)} \end{aligned}$$

ここで両辺を $|w|$ で割ると $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$ が得られる。

* * *

$|zw| = |z||w|$ や $|zw|^2 = |z|^2|w|^2$ などは示すまでもなく、当たり前のことのように思えるかもしれない。たしかに $|z|$ などは単なる数値であるから、わざわざ $|3 \cdot 5| = |3| \cdot |5|$ を示しているように見えるのは仕方ないであろう。しかし、$|z|$ などはひとつの数値にする前に $\sqrt{a^2+b^2}$ の計算をしてるのである。このことを無視して短絡的に結論を出すことは避けなければならない。それならば $z = a + bi$ の形を使って証明をしてもよさそうなものだが、それは少し手間だけである。実際に試してみると分かるはずだ。▌

方程式の解

2 次方程式は、解の公式が $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ であるから、$D < 0$ のときは必ず共役複素数の解 $x = -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{-D}}{2a}i$ になる。では逆に、実数を係数とする 2 次方程式のひとつの解が複素数 $a + bi$

だとしたら、もうひとつの解は $a-bi$ といえるだろうか。

このことは何となく自明のような気がする。なぜなら2次方程式の解の公式は、等式 $ax^2+bx+c=0$ を同値変形することで得られたので、共役複素数の組を解とする等式から逆にたどって元の方程式が復元できるからだ。

それならもう少し拡張した形で、実数を係数とする n 次方程式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (n \geq 2)$$

が解のひとつに $x = a+bi$ を持てば、$x = a-bi$ も解に持つと言えるだろうか。こうなるとそれほど自明のこととは言えないだろう。しかし、このことは正しい。それを示してみよう。

まず

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

とおくと、先の方程式は $f(x) = 0$ ということである。ここで、解のひとつを複素数 α とすると

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$$

が成り立つ。これは両辺とも 0 であるから、共役複素数をとって

$$\overline{a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n} = 0$$

となる。$\overline{0} = 0$ であることに注意しよう。

ところで、左辺の値は 0 になるといっても、各項は 0 でない複素数であるから、複素数の性質 $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ を繰り返し用いて

$$a_0\overline{\alpha^n} + a_1\overline{\alpha^{n-1}} + a_2\overline{\alpha^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}\overline{\alpha} + a_n = 0$$

にできる。実数 a に対して $\overline{a} = a$ であるから、係数は共役複素数で考える必要がないことに注意しよう。さて、この式は何であろう。それは $f(\overline{\alpha}) = 0$ である。このことは $\overline{\alpha}$ が $f(x) = 0$ の解であることを示しているのである。

以上で、$f(x) = 0$ が $x = \alpha$ を解に持てば、$x = \overline{\alpha}$ も解に持つことが言えるのである。