複素数の相等

複素数 $a+bi$ は実数 a と純虚数 bi の複合であるから、a と bi が計算されてひとつになることはない。$1+2a$ がこれ以上まとめられないように、$1+2i$ はこれでひとつの数を表すのである。$1+2i$ は $1+3i$ とは違うし $2+2i$ とも違う。このことは逆に

$$\boxed{a+bi=c+di \quad\Longleftrightarrow\quad a=c,\quad b=d}$$

ということである。言い換えると、複素数は実部と虚部がそれぞれ等しいときに等しい、といえる。

また、複素数が実数であるためには $b=0$ が必要な条件であるが、このとき $a=0$ ならばその複素数は 0 である。すなわち

$$\boxed{a+bi=0 \quad\Longleftrightarrow\quad a=0,\quad b=0}$$

が成り立つ。

複素数の四則計算

純虚数である bi、di は実数 b、d に虚数単位 i がついたもので、$(b+d)i$ は実数 $(b+d)$ に虚数単位 i がついたものである。虚数単位 i を考えなければ $b+d=(b+d)$ であるから、$bi+di=(b+d)i$ と見ることにする。このことから複素数の加法と減法は

$$\boxed{\begin{aligned}(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i\\(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i\end{aligned}}$$

となる。

乗法については、bi を虚数単位がついた実数としたとき

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2$$

になるが、$i^2=-1$ であったので

$$\boxed{(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i}$$

とまとめられることが分かる。

除法は少し工夫が要る。$\dfrac{a+bi}{c+di}$ の計算に対しては $c-di$ を考えるとよい。$c-di$ は $c+di$ の虚部の符号を変えた複素数で、$c+di$ と $c-di$ は互いに**共役（きょうやく）な複素数**と呼ばれる。互

いに共役な複素数どうしの和と積は

$$\begin{aligned}(c+di)+(c-di) &= 2c \\ (c+di)(c-di) &= c^2-d^2i^2=c^2+d^2\end{aligned}$$

となって、いずれも実数になるというよい性質を持っている。このことから

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di} &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} && \text{（共役複素数を分子・分母に掛けた）} \\ &= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} && \text{（分子・分母をそれぞれまとめた）} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i && \text{（実部・虚部を分けて記述）}\end{aligned}$$

と計算できるので、複素数どうしの除法はやはり複素数の形になっている。

$$\boxed{\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i}$$

以上のように複素数の四則計算を考察してみたが、早い話、複素数の四則計算は i を文字とする文字式の計算の仕方と大差なく、乗法においては $i^2=-1$ であること、除法においては互いに共役な複素数を掛けることを念頭において計算するだけのことである。しかし、それよりも重要なことは、複素数は四則計算について閉じていることである。では、開平はどうであろうか。このことについては、少し後で述べることにしたい。

複素数の大小関係

複素数は実数のように大小関係を定められないことを注意しておこう。たとえば $1+3i$ と $2+2i$ はどちらが大きいかという比較はできない。一般の複素数を考える以前に、もう少し基本的な大小関係 $2i>i$ を検証してみよう。$2>1$ であるから、$2i>i$ はもっともらしく見える。これが正しいとすると両辺から i を引いて $i>0$ であるから、i は正の値である。そこで $2i>i$ の両辺に i を掛けた場合

$$\begin{aligned}2i^2 &> i^2 \\ -2 &> -1\end{aligned}$$

となってしまい、矛盾が生じてしまう。

ならば、複素数の世界では $2i<i$ なのだろうか。これが正しいとすると両辺から i を引いて $i<0$ であるから、i は負の値である。そこで $2i<i$ の両辺に i を掛けると、不等式に負の値を掛けると

きは不等号の向きを逆にすることに注意して

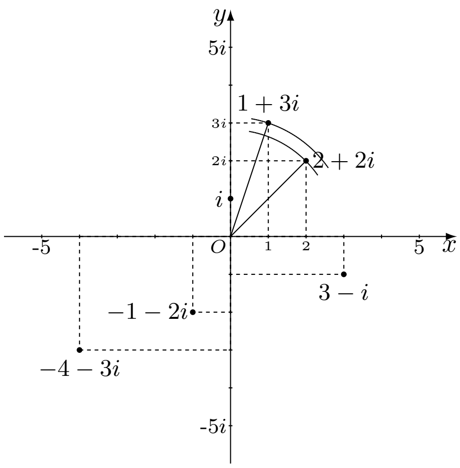
$$
\begin{aligned}
2i^2 &> i^2 \\
-2 &> -1
\end{aligned}
$$

となってしまい、やはり矛盾が生じてしまう。

こんな簡単なことさえ思うに任せないので、複素数には大小関係を定めることはしないのである。

複素平面

複素数に大小関係が定められないのには理由がある。実数は数直線上の点で表せるので、数直線の右側の数ほど大きいと定めることで、実数に大小関係が導入できる。しかし、複素数は数直線上に表すことはできない。複素数を表すには**複素平面**（または複素数平面）が必要である。



複素平面においては、x 軸を**実軸**、y 軸を**虚軸**と呼び、軸の目盛はふつう複素数の実部と虚部—すなわち実数値—に対応させるが、ここでは虚軸の目盛は虚数単位 i を含めて記述することにしている。

さて、実数の大小は数直線の左右の位置で比較した。しかし複素平面上では、2 つの複素数の相対的な位置で大小を判断できないのである。このことが複素数に大小関係を定められない原因である。ただ、原点 O からの絶対的な位置を基準にするなら、2 つの複素数の大小を決められる。絶対的な位置を原点からの距離で定義し、それを $|a+bi|$ で表せば

$$
\begin{aligned}
|1+3i| &= \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} \quad \text{（三平方の定理より）} \\
|2+2i| &= \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} \quad \text{（　　〃　　）}
\end{aligned}
$$

であるから、$|1+3i|>|2+2i|$ といってよい。これは**複素数の絶対値**といい

$$\boxed{|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}}$$

と定義する。

＊　＊　＊

数直線は英語で number line と言うので、“数直線” という呼び名は英語を日本語に訳したものと考えられる。複素平面は英語で complex plane と言うので、“複素平面” という呼び名も英語を日本語に訳したものだろう。複素平面を複素数平面と呼ぶことがあるのは、数直線に対応させた呼び名と思われるが、それなら数直線は “実数直線” と呼ばれなければ、完全な対応とは言えないだろう。言葉をきちんと定着させるのは、なかなか困難があるようである。▮