数の体系

数の基本は整数である。整数の集合 $\mathbf{Z}$ は

$$\mathbf{Z} = \{\ldots,\ -100,\ \ldots,\ -10,\ \ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ \underbrace{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 10,\ \ldots,\ 100,\ \ldots}_{\mathbf{N}}\}$$

と表せる[1]。整数は数直線の目盛に利用され、いくらでも大きな正の数といくらでも小さな負の数を無限に含んでいる。整数の集合は自然数の集合 $\mathbf{N}$ を含むのだが、正の整数 $1, 2, 3, \ldots$ を自然数と定義する流儀と非負整数 $0, 1, 2, 3, \ldots$ を自然数と定義する流儀があるようだ[2]。ここでは正の整数を自然数とし、0 は自然数に含めない立場をとることにする。

* * *

自然数の定義に限らず、数学では言葉や表記が微妙であることが多い。たとえば "単調増加列" とは

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$$

のようなものだけに限るのか、ときに同じ値をとる

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n$$

のようなものも含めるのか、といった具合である。

こんなことが統一されない理由は、おそらく統一するとかえって不自由なことが出来（しゅったい）するからだと思われる。厳密を旨とする数学にもこんな面があることを知っておくのも悪くない。▮

2 数の整数比で表すことができる数は有理数と呼ばれる。したがって有理数の集合は

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m,\ n \in \mathbf{Z};\ n \neq 0 \right\}$$

という表し方になるだろう[3]。できれば $\mathbf{Z}$ のように、数値を列挙したいのだがそうもいかず、難しそうな記号に圧倒されただろうか。でも、実はどうということはない。$\mathbf{Q}$ は $\dfrac{m}{n}$ の形の数であると言いたいので、そのことが $|$ の左側に書かれているに過ぎない。ただ、$\mathbf{Q} = \left\{\dfrac{m}{n}\right\}$ で済ませてしまうと m や n に小数を当てはめられても文句を言えないので、記号 $\in$ を用いて、m, n は整数の集合に**属している**数であることを $|$ の右側に書いているのである[4]。この場合、分母に 0 を取れないので $n \neq 0$ も併記してある。また、$\mathbf{Q}$ の定義の仕方から $\mathbf{Z}$ は $\mathbf{Q}$ に含まれることが分かる。なぜなら、$n = 1$ のときに $\dfrac{m}{1}$ はすべての整数を表すからだ。

---

[1] $\mathbf{Z}$ は Ganze Zahl（ドイツ語で整数）の略。
[2] $\mathbf{N}$ は National Number（英語で自然数）の略。
[3] $\mathbf{Q}$ は Quotient（英語で商）の略。有理数は英語で Rational Number。
[4] $m,\ n \in \mathbf{Z}$ は「m, n は $\mathbf{Z}$ に属する」「$\mathbf{Z}$ は m, n を要素とする」などと読む。

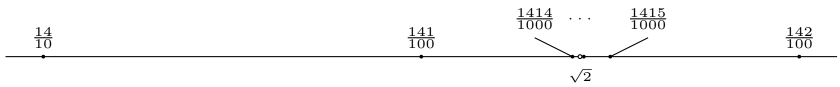
整数と有理数があれば日常生活で困ることはないし、十分に精確なあらゆる値を表せるのであるが、これだけでは数直線を埋め尽くすことができない。たとえば $\dfrac{12}{5}$ と $\dfrac{13}{5}$ の間には $\dfrac{1}{5}$ だけの隙間がある。しかし、これらの有理数を通分した形の $\dfrac{120}{50}$ と $\dfrac{130}{50}$ と見れば、その間を

$$\frac{120}{50},\ \frac{121}{50},\ \frac{122}{50},\ \ldots,\ \frac{129}{50},\ \frac{130}{50}$$

のように埋められるものの、先頭の $\dfrac{120}{50}$ と $\dfrac{121}{50}$ の間には、$\dfrac{1}{50}$ だけの隙間が相変わらず生じてしまう。同じようにすれば、隙間は $\dfrac{1}{500}, \dfrac{1}{5000}, \ldots$ のようにどんどん縮まるのであるが、決して 0 になるわけではない。したがって、このような操作を無限に続けても 2 つの有理数が "つながる" ことはなく、あらゆる所が隙間だらけであるといってよい。この状態は**稠密（ちゅうみつ）**と呼ばれる。整数と有理数だけで十分に精確なあらゆる値を表せるといっても、完璧に正確なあらゆる値を表せるわけではないのである。

隙間には何もないのかというと、そうではない。隙間は無理数の席である。たとえば有理数の点列を

$$\frac{14}{10},\ \frac{141}{100},\ \frac{1414}{1000},\ \frac{14142}{10000},\ \cdots \rightarrow\ (\sqrt{2})\ \leftarrow \cdots,\ \frac{14143}{10000},\ \frac{1415}{1000},\ \frac{142}{100},\ \frac{15}{10}$$



のように、整数の桁をひとつずつ増やしながら数直線上に打つとする。この有理数は $\sqrt{2}$ を模倣していて、無限の先まで続けることはできるのだが、決して $\sqrt{2}$ と一致しない。なぜかというと、どれだけ無限の先へ行っても有理数は決して無理数になることはないからである。つまり有理数が $\sqrt{2}$ の穴を埋めることはない。したがって数直線は、有理数に無理数を加えて初めて隙間のない直線となるのである。

数直線上の数の集合は実数 $\mathbf{R}$ で表す[5]。結局、$\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ は

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

という関係にある。ここで記号 $A \subset B$ は、集合 A が集合 B に**含まれる**ことを意味する[6]。記号 $\in$ との違いを注意しておこう。$a \in B$ は要素と集合の所属関係を、$A \subset B$ は集合と集合の包含関係を表すための記号であることに注意されたい。また、集合と要素の違いを強調するために、集合は大文字で、要素は小文字で表すことは習慣となっていることを補足しておこう。

[5] $\mathbf{R}$ は Real Number（英語で実数）の略。
[6] $A \subset B$ は「A は B に含まれる」「B は A を含む」などと読む。

連続

さて、隙間のない数直線は**連続**である。数直線は実数の集まりであるから、実数の集合は連続であるといっても同じことである。つまり私たちの感覚で、実数は “つながっている” といえる。ただし、実数が連続であるということは、ある実数 a, b がつながっていることではない。どんな a, b についても $\dfrac{a+b}{2}$ が計算でき、しかもこの値は a, b の間にあることを考えれば、誰も a, b がつながっていると思わないだろう。連続という概念は、各点どうしのつながりを尺度としているわけではないのである。

実数について難しいのは連続性だけでなく、たとえば $\sqrt{2}$ が数直線上の一点として特定できるのだろうかということである。というのは、$\sqrt{2} = 1.41421356\cdots$ は小数点以下の数字が無限に続き決して定まることがないから、$\sqrt{2}$ の位置は決まらないのではないかと思えるからである。

ところが $\sqrt{2}$ の位置は定まるのである。このことを説明してみよう。いま、$\sqrt{2}$ の数字をひとつずつたどり小数点以下第 n 位の数字 N まで拾ったとする。このとき $N = 9$ ならば、もう少し先の $N \neq 9$ となる N まで拾うことにする。ここで N より 1 大きい数字を $\tilde{N}$ とすると、明らかに

$$(1.\underbrace{414\cdots N}_{n\text{ 個}}) < \sqrt{2} < (1.\underbrace{414\cdots \tilde{N}}_{n\text{ 個}})$$

であるから、$\sqrt{2}$ は 2 つの有理数にはさまれた幅 $\dfrac{1}{10^n}$ の範囲に入っていることになる。n が大きくなればなるほど幅 $\dfrac{1}{10^n}$ は狭い範囲になり、無限の彼方では幅 0 と考えてよい。幅 0 の場所に一点が特定できるので、そこが $\sqrt{2}$ である。

複素数

四則計算—つまり足す、引く、掛ける、割る—を考えてみよう。自然数は足し算をする限りにおいて不足はない。なぜなら、どんな自然数どうしを足しても結果は自然数になるからである。しかし自然数は、引き算をする場合に不都合が生じる。たとえば $15-17$ は自然数にならず、整数の範囲まで広げた数 -2 を必要とする。

$$15+17=32 \bigcirc, \qquad 15-17=-2\ (\text{自然数ではない})\ \times$$

数の範囲が整数なら不足がないかといえば、そうではない。たしかに、足す、引く、掛けるまでなら、どんな整数どうしでも結果は整数に収まるが、割り算は必ず整数になるわけではない。たと

えば $10 \div 3$ は整数にならず、有理数の範囲まで広げた数 $\dfrac{10}{3}$ を必要とする。

$$15 - 17 = -2 \ \bigcirc, \qquad 10 \times 3 = 30 \ \bigcirc, \qquad 10 \div 3 = \frac{10}{3}\,(\text{整数ではない})\ \times$$

では、有理数に不都合は生じないだろうか。有理数は、足す、引く、掛ける、割るに対して、結果は必ず有理数の範囲に収まる。ただし割る際には、0 で割ることはもともと考えに入れないので、有理数は四則計算に関して不足はない。このことを、有理数は四則計算について**閉じている**という。しかし、有理数だけで完璧に数の計算ができるかというとそうではない。なぜなら、開平計算について不都合が生じるからだ。

$$10 \div 3 = \frac{10}{3} \ \bigcirc, \qquad x^2 = 2 \ \Rightarrow \ x = \sqrt{2}\,(\text{有理数ではない})\ \times$$

開平計算とは、たとえば $x^2 = \dfrac{9}{4}$ になる x を探す計算である。この場合は $x = \dfrac{3}{2}$ が見つかるが、$x^2 = 2$ は有理数の範囲では開平できず、実数の範囲まで広げた数 $\sqrt{2}$ を必要とする。

さて、実数は数直線を完全に埋め尽くしているので、数はこれで全部である。したがって実数は、四則計算と開平計算において閉じていると考えたいのだが、残念なことに実数も開平計算について閉じていないのである。それは $x^2 = -1$ を開平できないことから分かる。なぜなら、すべての実数は 2 乗すると正の数か 0 になって決して負の数にならないので、$x^2 = -1$ となる実数は存在しないからである。

これまでの流れを振り返ると、計算に不都合が生じたときは数の範囲を広げることで解決できた。$x^2 = -1$ を満たす実数が存在しないのであれば、その上の範囲まで広げた数があればよい。そこで $x^2 = -1$ となる数 i を導入することにする。すなわち

$$\boxed{i^2 = -1}$$

と定義しよう。いま i は数であると言ったが、実際は数というより “単位”、つまり符号のようなものと思ってもよい。というのは、自然数の集合

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

に符号 $-$ を付加して、負の整数の集合

$$-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ \ldots$$

が作られるように、整数の集合に i を付加して**虚数**の集合

$$\ldots,\ -3i,\ -2i,\ -1i,\ 0i,\ 1i,\ 2i,\ 3i,\ \ldots$$

ができるからである。i は**虚数単位**という。そして、符号 $-$ があらゆる正の実数に付加できるように、虚数単位 i もあらゆる実数に付加できるのだが、ひとつの例外として $0i=0$ と定める。これは、0 には $+$ や $-$ の符号がつかないのと同様、虚数単位 i もつけないことを意味する。また $1i$ と $-1i$ は、文字式を記述する約束に従い i、$-i$ と書くことにする。そうすると i だけを目にした場合、それが数 $1i$ なのか単位 i なのかが区別できないことになるが、そのことで困ることはないので問題ないであろう。

さて、実数 a と虚数 bi を考える。虚数 bi というときは b は実数であるとする。このとき、実数 a と虚数 bi を組み合わせた数 $a+bi$ を考えると新たな数ができる。$a+bi$ を**複素数**と呼ぶ。$a+bi$ のうち実数 a を**実部**、実数 b を**虚部**と呼んで区別することがある。

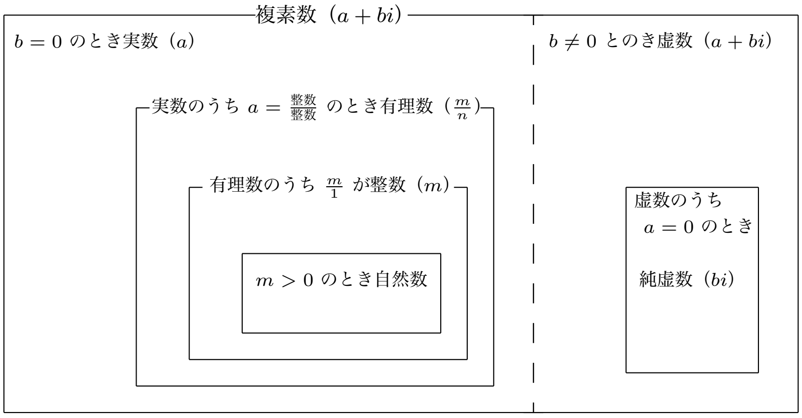
$$\boxed{\text{実数 } a\text{、}b \text{ を用いて } a+bi \text{ で表される数を複素数と呼ぶ}}$$

また、$a+bi$ において $b=0$ のときは $a+0i=a$ であるから、複素数には実数が丸ごと含まれる。$b\neq 0$ のときは、必ず i を含むので虚数である。このとき $a\neq 0$ なら $a+bi$ なる複素数、$a=0$ なら bi なる**純虚数**と区別することもある。

複素数の集合を $\mathbf{C}$ で表すと、数は

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$$

という包含関係にまで拡張されることになる[7]。



[7] $\mathbf{C}$ は Complex Number（英語で複素数）の略